SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

# RENDICONTO DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXV - ANNO CXXXVII

*(1998)*

LIGUORI EDITORE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

# RENDICONTO DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXV - ANNO CXXXVII

*(1998)*

LIGUORI EDITORE

Tutti i diritti sono riservati. Nessuna parte di questa pubblicazione può essere tradotta, riprodotta, copiata o trasmessa senza l'autorizzazione dell'editore. L'AIDRO (Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione delle Opere dell'Ingegno), via delle Erbe 2, 20121 Milano, potrà concedere una licenza di riproduzione a pagamento per una porzione non superiore a un decimo del presente volume.

Prima edizione italiana Dicembre 1998
Liguori Editore, S.r.l.
via Posillipo 394
I 80123 Napoli

Copyright © Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche 1998

Napoli : Liguori, 1998
ISBN 88 - 207 - 2899 - 0

*Ristampe:*

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 2003 2002 2001 2000 1999 1998

Questo volume è stampato in Italia dalle Officine Grafiche Liguori - Napoli su carta inalterabile, priva di acidi, a PH neutro, conforme alle norme Iso 9706 ∞.

**INDICE**

L. Migliaccio, G. Moscariello - *Higher integrability of the gradient of solutions of certain P.D.E.'s* pag. 7

L. Carbone, G. Cardone, J. Casanovas S.J., S. Mancuso, F. Palladino - *Le Meridiane del Cortile delle Statue nel Collegio Massimo dei Gesuiti in Napoli* » 11

L. Carbone, G. Cardone, J. Casanovas S.J., S. Mancuso, F. Palladino - *La sede storica degli Studi Superiori di Matematica a Napoli nella sua attuale configurazione* » 31

N.A. D'Auria, O. Fiodo - *Boundary problems for degenerate parabolic operators of second order* » 67

L. Carbone, G. Cardone, F. Palladino - *Le collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II": cataloghi ragionati* » 93

G. Frigione - *Il calcestruzzo alle soglie del 2000: bilanci e prospettive* » 259

B. D'Acunto - *Free piston problem for a viscous gas* » 269

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXV, (1997) pp. 7-10

# HIGHER INTEGRABILITY OF THE GRADIENT OF SOLUTIONS OF CERTAIN P.D.E.'s

Nota di Lucia Migliaccio e Gioconda Moscariello

Presentata dal Socio Carlo Sbordone

(Adunanza del 10 gennaio 1998)

**Riassunto.** Si dà un risultato di maggiore sommabilità per il gradiente di una soluzione variazionale di un'equazione del tipo

$$\text{div } (a(x)\nabla u) = 0$$

quando $a(x)$ e $a^{-1}(x)$ sono funzioni dello spazio di Orlicz $\text{Exp}_\gamma(\Omega)$, $\gamma > 1$, dove

$$\|h\|_{\text{Exp}_\gamma(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \exp \left( \frac{|h(x)|}{\lambda} \right)^\gamma dx < 2 \right\} .$$

**Abstract.** A higher integrability result is stated for the gradient of a variational solution of the equation

$$\text{div } (a(x)\nabla u) = 0$$

with $a(x)$ and $a^{-1}(x)$ in the Orlicz space $\text{Exp}_\gamma(\Omega)$, $\gamma > 1$, defined according to the norm

$$\|h\|_{\text{Exp}_\gamma(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \exp \left( \frac{|h(x)|}{\lambda} \right)^\gamma dx < 2 \right\} .$$

Let $\Omega$ be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$.

For $1 \leq q < \infty$ and $-\infty < \alpha < +\infty$ the Zygmund space $L^q \log^\alpha L(\Omega)$

consists of all measurable functions $h$ on $\Omega$ for which the nonlinear functional

$$\|h\|_{L^q \log^\alpha L} = \left( \fint_\Omega |h(x)|^q \log^\alpha \left( e + \frac{|h|}{|h|_\Omega} \right) dx \right)^{1/q}$$

is finite, where $|h|_\Omega = \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega |h| dx = \fint_\Omega |h| dx$.

The Orlicz space $\mathrm{Exp}_\gamma(\Omega)$, $\gamma > 0$ is defined according to the norm

$$\|h\|_{\mathrm{Exp}_\gamma} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \fint_\Omega \exp \left( \frac{|h|}{\lambda} \right)^\gamma < 2 \right\}$$

Let now $A(x) = (a_{ij}(x))$, $i, j = 1 \dots n$, be a measurable function on $\Omega$ with values in the space of symmetric positive definite matrices. Precisely we assume that

$$\lambda(x)|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle \tag{1.1}$$

$$|A(x)\xi| \leq \mu(x)|\xi| \tag{1.2}$$

for a.e. $x \in \Omega$ and every $\xi \in \mathbb{R}^n$, where $0 < \lambda(x) \leq \mu(x) < \infty$.

If $\lambda^{-1}$, $\mu \in L^1(\Omega)$ and the matrix $A(x)$ is symmetric, we can define the Hilbert space $H(\mathcal{A}, \Omega)$ as the completion of $C^1(\Omega)$ under the scalar product

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_\Omega A(x) \nabla u(x) \, \nabla v(x) \, dx + \int_\Omega \mu(x) u(x) v(x) dx$$

The space $H_{loc}(\mathcal{A}, \Omega)$ is then defined as usual from $H(\mathcal{A}, \Omega)$.

We say that $u \in H_{loc}(\mathcal{A}, \Omega)$ is a local solution of the equation

$$\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) = 0 \tag{1.3}$$

iff

$$\int_\Omega A(x)\nabla u \nabla \varphi \, dx = 0$$

for all $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

In the following we assume

$$\lambda^{-1}(x), \quad \lambda^{-1}(x)\mu^2(x) \in \mathrm{Exp}_\gamma(\Omega) \tag{1.4}$$

for some $\gamma > 1$.

**Theorem.** *Let $u \in H_{loc}(\mathcal{A}, \Omega)$ be a local solution of (1.3). If $\lambda(x)$, $\mu(x)$ verify (1.4), then*

$$|\nabla u|, \quad |A\nabla u| \in L^2 \log^\alpha L(\sigma\Omega)$$

*for any $\alpha \geq 0$ and $0 < \sigma < 1$.*

**Remark.** When $\lambda$, $\mu$ belong to $L^\infty(\Omega)$ the gradient and the energy of a solution of (1.3) have obviously the same regularity. We achieved a similar result in the weaker condition (1.4).

The proof of theorem is obtained combining some regularity results of div-curl products ([CLMS], [GIM], [S]), with appropriate Hölder inequalities in Orlicz spaces ([RR]).

## References

[CLMS ] R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes, **Compensated compactness and Hardy spaces**, *J. Math. Pures Appl.* (1993), 247-286.

[GIM ] L. Greco, T. Iwaniec, G. Moscariello, **Limits of the improved integrability of the volume forms**, *Indiana Univ. Math. Journ.*, n.2 (1995), 305-339.

[RR ] M.M. Rao, Z.D. Ren, **Theory of Orlicz spaces**, Marcel Dekker, City 1991.

[S ] C. Sbordone, **New estimates for div-curl products and very weak solutions of P.D.E.'s**, *Annali di Pisa*, to appear.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXV, (1997) pp.11-30

# LE MERIDIANE DEL CORTILE DELLE STATUE NEL COLLEGIO MASSIMO DEI GESUITI IN NAPOLI

Nota di L.Carbone* - G.Cardone** - J.Casanovas, S.J.***
S.Mancuso**** - F.Palladino*****

Presentata dal socio Luciano Carbone
(Adunanza del 7/3/1998)

**Riassunto** - Nella presente nota intendiamo descrivere il complesso delle Meridiane del Cortile delle Statue nel Collegio Massimo dei Gesuiti in Napoli dal punto di vista storico e scientifico, anche allo scopo di meglio garantirne la conservazione e promuoverne il restauro.

**Abstract** - In this work we intend to describe the Sundials of the Cortile delle Statue in the Collegio Massimo dei Gesuiti in Naples from historical and scientific points of view, in order to preserve them better and to promote their restauration, too.

* Università degli Studi di Napoli "Federico II" - Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli".

** Seconda Università degli Studi di Napoli - Dipartimento di Ingegneria Civile.

*** Specola Vaticana.

**** Università degli Studi di Napoli "Federico II" - Dipartimento di Scienze Fisiche.

***** Università degli Studi di Salerno - Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata.

## 1. INTRODUZIONE

L'avventura delle scienze matematiche all'interno del complesso gesuitico del Salvatore, sede del Collegio Massimo, ha inizio con l'edificazione stessa dell'edificio[1].

I Gesuiti erano stati assai attivi nel Collegio ove si era soffermato anche il celebre Clavio e dopo la loro espulsione vi furono subito situati il Liceo del Salvatore e l'Università, proprio negli anni in cui si sviluppava la scuola di Nicola Fergola[2].

Del lungo periodo preunitario è sopravvissuta una testimonianza matematica di grande bellezza estetica e rigore intellettuale, il complesso delle Meridiane posto nel Cortile delle Statue[3].

## 2. DESCRIZIONE DEL COMPLESSO DELLE MERIDIANE

Il Complesso delle Meridiane è assai singolare. Esso infatti non solo è costituito da ben 4 meridiane, a parete verticale con stili perpendicolari, ma è anche collocato all'*interno* del Cortile sulla parete che guarda verso Est, al di sotto dell'orologio negli interspazi delle finestre. Attualmente le meridiane sono quasi completamente inattive proprio a causa di una galleria a Sud, al secondo

---

[1] Per notizie sull'edificio si vedano [Rotili 1955], [Errichetti 1960, 1976], [Alisio 1966], [Pinto 1990, 1991] e le bibliografie ivi contenute.

[2] Si vedano per le attività matematiche dei Gesuiti [Gatto 1994] e per le attività matematiche nell'Università e nelle Accademie dal 1652 al 1860 il classico [Amodeo 1905, 1924], opere entrambe munite di ricca bibliografia.

[3] Per le Meridiane in generale si vedano [Rohr 1988], [Fantoni 1988], [Rigassio 1988] che contengono anche ampie bibliografie.

piano, costruita in sopraelevazione e interposta tra lo stesso Cortile e la chiesa del Gesù.

Come è ben noto le meridiane a parete avevano varie finalità: quella più ovvia era di indicare l'ora solare e consentire così la regolazione degli orologi, ma esse avevano anche un forte valore emblematico di natura culturale, sociale ed estetico, e chiari obbiettivi di questo tipo si propone anche il complesso in esame.

Negli interspazi tra le finestre del secondo piano di fronte all'ingresso principale del Cortile si susseguono da sinistra a destra rispetto all'osservatore un orologio ad ore italiche, un orologio a ore astronomiche, un orologio ad ore stagionali e un orologio ad ore babilonesi.

Nel sistema di misurazioni ad ore italiche, così chiamato perché tradizionale ed assai diffuso nel nostro paese, la fine di un giorno e l'inizio del successivo vengono fissati al tramontare del sole. Sul quadrante è possibile allora leggere quante ore mancano al tramonto, cioè alla fine del giorno di luce.

Nell'orologio ad ore babilonesi il sistema di misurazione è simile a quello italico, solo che in esso è il sorgere del Sole che dà l'inizio alla prima ora del giorno e continua sino all'indomani con la ventiquattresima ora dell'alba. Sul quadrante è allora possibile leggere quante ore sono trascorse dal sorgere del sole. In entrambi i sistemi la giornata è divisa in 24 ore uguali. La giustapposizione di un orologio ad ore italiche e di un orologio ad ore babilonesi consente così di sapere sia quante ore sono trascorse dal sorgere del Sole, sia quante ore mancano al tramonto.

Nell'orologio ad ore astronomiche (o francesi) l'inizio della giornata coincide col passaggio del Sole in meridiano. Naturalmente l'individuazione di tale passaggio è assai più precisa che l'individuazione dell'aurora o del tramonto. Il giorno, dapprima suddiviso in 24 ore uguali, fu in un secondo momento

distinto in due parti di 12 ore ciascuna. Sul quadrante è possibile allora leggere quante ore sono passate dalla mezzanotte o dal mezzogiorno.

Nell'orologio ad ore stagionali (o temporarie, o greco-romane o antiche) l'inizio della giornata coincide col sorgere del Sole; il giorno luce è suddiviso in 12 ore eguali e analogamente la notte, sicché l'ora sesta cade sempre al mezzogiorno e l'ora dodicesima al tramonto; in questo modo la durata dell'ora dipende dalla durata del giorno luce, e dunque dalla stagione. Sul quadrante è possibile allora leggere quale frazione (in dodicesimi) è trascorsa del giorno luce [Giorgetti Casanovas 1981].

Tale interpretazione dei quadranti è confortata dagli esiti di una riprogettazione sulla base di tale ipotesi dei quadranti stessi effettuata con l'ausilio di un opportuno programma. La riprogettazione ha consentito anche di valutare l'eccellenza della concezione originale[4].

Sulla parete sovrastante gli orologi gli stili, ancora presenti, sono negli angoli superiori sinistri dei quadranti; sui quadranti stessi non v'è traccia della linea del solstizio estivo, né di quella del solstizio invernale; è tracciata, invece, la linea equinoziale.

Sono inoltre tracciate solo poche linee orarie corrispondenti alle ore del mattino, esattamente 6 nell'orologio a ore italiche, di cui solo 4 hanno segno di numerazione, con cifre arabe dall'11 al 14, 5 nell'orologio a ore astronomiche, tutte numerate con cifre romane dal VI al X, 5 nell'orologio a ore babiloniche tutte numerate con cifre arabe dall'1 al 5, 4 nell'orologio a ore stagionali numerate con cifre romane dal I al IV, ove però il IV è sostituito da IIII. Si è in presenza così di segni evidenti che anche nel periodo di miglior funzionamento

[4] Per programmi relativi alla progettazione di meridiane si veda anche [Cintio 1992].

delle meridiane, esse erano in grado di dare indicazioni solo per poche ore al giorno.

Sulla parete di fronte a quella ove sono le meridiane, appaiono degli elementi metallici, che rassomigliano a degli stili, e sovrastano anch'essi gli interspazi tra le finestre, relitti forse di un altro complesso di meridiane. Se quest'ipotesi è corretta, con l'avanzare della giornata si sarebbe dovuto poter leggere l'ora su questo secondo complesso. Ci si troverebbe così di fronte ad un espediente assai ingegnoso per realizzare un orologio solare all'interno di un cortile aperto, parzialmente, da un solo lato.

Taluni reperti fotografici d'epoca ([Napoli 1930]) sembrano confermare questa ipotesi: è possibile infatti evidenziare in essi quelle che appaiono essere tracce di un secondo complesso di meridiane[5].

I quadranti delle meridiane non conservano attualmente tracce di quelle decorazioni che tanto frequentemente accompagnano tale monumento, ma non è possibile precisare se la concezione iniziale fosse piuttosto severa o se le decorazioni siano cadute in seguito a restauri successivi. Taluni di questi restauri sembrano comunque essere stati eseguiti in maniera approssimativa: ad esempio la scritta in maiuscolo ASTRONOMUS apposta nel quadrante dell'orologio ad ore astronomiche deve aver sostituito una più corretta ASTRONOMICUM (horologium) o ASTRONOMICAE (horae). Anche ad un restauro mal fatto è, quasi certamente, da attribuirsi l'attuale tracciato della linea relativa all'ora X nello stesso orologio che la riprogettazione pare evidenziare come erroneo.

---

[5] La notizia è dovuta alla cortesia dell'architetto Pinto che segue i restauri in atto sul lato est del Cortile delle Statue. Alcuni rilevamenti effettuati in loco dallo stesso architetto non hanno, però, potuto dare esiti positivi in quanto la facciata appare ricoperta di recente da strati di intonaco e colore.

## 3. OSSERVAZIONI SUL PROBLEMA DELLA DATAZIONE

Per quanto concerne i problemi dell'epoca nella quale è stata realizzato il complesso di meridiane e di chi le ha progettate, a tutt'oggi si hanno pochi elementi.

Si può individuare però un termine *post quem*: nel libro di Girolamo di S.Anna del 1708 ([Girolamo di S.Anna 1708]) sono riportate piante e sezione del Cortile delle Statue; la sezione è tirata all'interno dello stesso cortile e parallelamente proprio alla facciata ove sono attualmente situate le meridiane; la facciata è rappresentata con grande dovizia di particolari, ma su di essa non si notano le meridiane.

Naturalmente non si può escludere un'omissione, ma se si assume che omissione non ci sia, si può concludere che le meridiane non possono essere state concepite né dal Clavio autore del celebre *Gnomonices libri octo* ... ([Clavio 1581]) presente a Napoli presso il collegio dei Gesuiti nel 1595 e nel 1596, né dal Trotta, autore di varie opere sulle meridiane ([Trotta 1651]) e che insegnò Matematica nel Collegio per sette anni tra il 1620 e il 1629.

Un altro termine stavolta *ante quem* abbastanza certo è costituito dai già citati lavori di ampliamento del 1926-1928 che resero quasi inattivo il complesso di Meridiane: la presenza della sopraelevazione è già attestata ad esempio dai reperti fotografici presenti in [Cutolo 1933]. Rimane così un margine di tempo assai vasto: oltre due secoli. Si può azzardare la congettura che il complesso delle Meridiane risalga alla seconda metà del Settecento. In effetti proprio in quel periodo furono erette a Napoli varie meridiane di notevole pregio artistico (sia pure sotto la forma, più precisamente, di linee meridiane): è ancora in ottimo stato quella del Casella nell'attuale museo Nazionale ([Mancuso 1998]); da poco è stata restaurata quella del cosiddetto Quarto del Priore nella Certosa di San Martino; sono ricordate ([Amodeo 1905]) quella fatta costruire dal Carcano nel

Collegio di San Carlo alle Mortelle, e quella ideata dal Sabatelli per la biblioteca del Palazzo del Principe Spinelli di Tarsia; al 1769 risale infine la meridiana portatile costruita su progetto del Barone Giuseppe Caetani per la latitudine di Napoli attualmente conservata dal Museo del Dipartimento di Scienze Fisiche della "Federico II" ([Ragozzino Schettino 1988]).

Tra gli indizi che possono essere portati a sostegno di questa congettura si può segnalare l'esistenza di un cascinale presso Villafranca (Verona) sicuramente settecentesco, sulla cui facciata negli interspazi delle finestre, proprio come nel Cortile delle Statue, sono stati situati 5 orologi ad ore italiche, ad ore francesi o europee, ad ore stagionali, ad ore babilonesi, ad ore lunari, con ricche decorazioni. Il riunire le principali letture vigenti in Europa, permettendo al visitatore di leggere l'ora con il sistema da lui più conosciuto, s'accordava bene col clima cosmopolita della seconda metà del Settecento, e la presenza simultanea di più meridiane finiva con il costituire una soluzione, esteticamente brillante, del serrato dibattito tra fautori delle tradizionali ore italiche e delle ore astronomiche, ben documentato ad esempio in Veneto tra il 1785 e il 1789 ([Romano Notarangelo Vanzin 1991]).

Bisogna tuttavia ricordare che la giustapposizione di meridiane con diversi sistemi di misurazione del tempo è assai frequente; talora i diversi sistemi sono annotati sullo stesso quadrante. Inoltre, già nella *Cosmographia Universalis* (1544) del religioso protestante Sebastiano Münster, vi è un progetto di orologio verticale nel quale, sul quadrante, tra varie informazioni astronomiche astrologiche e calendari, si incrociano le linee orarie stagionali, italiche, babilonesi, astronomiche ([Fantoni 1988]).

Un'ulteriore indizio è legato alla presenza sul secondo quadrante della parola (corretta) ASTRONOMUS: è l'unica parola presente sulle meridiane e ciò

potrebbe essere legato alla necessità di dare un'indicazione su di un quadrante, almeno in Italia, ancora poco diffusa[6].

Va segnalata infine l'attività a Napoli verso la metà del Settecento tra gli esperti di astronomia anche del gesuita Nicola Gianpriamo; tuttavia nella sua opera ([Gianpriamo 1748]), ove v'è menzione degli studi astronomici nel Collegio Massimo, non v'è cenno alle meridiane in esame.

Un notevole apprezzamento sugli strumenti astronomici presenti intorno al 1765 nel Collegio è dato dal celebre astronomo La Lande nel suo *Voyage* ([La Lande 1769], VI 266):

"Non seulement la bibliothèque est très nombreuse mais on y voit des très beaux instruments d'Astronomie [...]; mais ces Pères qui ont toujours donné dans tous les genres de talens des hommes du premier ordre suivent avec soin le progrès des Sciences ...".

L'apprezzamento è ripetuto dal La Lande nella sua *Astronomie* ([La Lande 1792], I, XIX) mentre il barone di Zach esprime giudizi assai severi sulle osservazioni astronomiche effettuate da Gianpriamo al Collegio nella sua *Correspondance* ([Zach 1819], II lettre XXV).

Lo stesso La Lande, tuttavia, che pure descrive nel *Voyage* con accuratezza gli strumenti osservati nel Collegio e che aveva progettato la costruzione e il

---

[6] A tale proposito si può osservare che ancora nel 1812 a Napoli si sentiva la necessità di esplicitare anche ad un pubblico colto la corrispondenza tra ore astronomiche e ore italiche. Così nell'*Avviso* introduttivo agli studenti universitari per l'anno 1812-1813 ([Calendario 1812]) si poteva leggere:

"[...] L'apertura giornaliera della Regia Università è fissata stabilmente per la mattina alle ore otto e mezzo di Francia e pel giorno alle ore venti d'Italia; ma tali ore si rinvengono annunziate in questo Calendario alla francese, ed alla italiana per maggiore intelligenza della gioventù".

restauro di celebri meridiane ([Rohr 1988], [Fantoni 1988]), non fa menzione di quelle del Cortile.

Gli inizi dell'Ottocento appaiono invece un limite cronologico difficilmente valicabile: con l'età napoleonica fu imposta l'ora astronomica come ora legale, mentre le mutate condizioni sociali e l'istituzione degli osservatori astronomici di stato che avevano tra i loro compiti proprio l'individuazione dell'ora ufficiale del luogo, tendevano a confinare l'uso delle meridiane nelle ville di campagna.

Pur nell'ipotesi di una datazione nella seconda metà del settecento, non sembra possibile attribuire con certezza ai Gesuiti il complesso delle meridiane: non si può escludere infatti un intervento della Corona nel periodo intercorso tra l'espulsione dei Gesuiti (1767) e la rivoluzione partenopea (1799)[7]. Si potrebbe allora pensare anche ad un elemento decorativo introdotto proprio allo scopo di sottolineare il cambiamento di destinazione del Collegio[8].

---

[7] In effetti con l'insediamento dell'Università (1777), dell'Accademia di Scienze e Belle Lettere (fondata nel 1778, ma inaugurata il 5 luglio 1780), del Collegio Ferdinandeo (1786) nel Collegio gesuitico, anche in seguito a dissesti statici, furono eseguiti notevoli lavori ([Pinto 1991]).

[8] Vale la pena di segnalare esplicitamente come anche nelle ricerche di Romano Gatto, che più di recente, per la composizione del suo già citato volume ([Gatto 1994]), ha esaminato grandi serie di documenti concernenti il Collegio Massimo sia negli archivi napoletani che in quelli romani, e con particolare attenzione alle questioni di interesse matematico, non sia emerso alcun elemento relativo al complesso delle meridiane (comunicazione orale). Grazie alla cortesia di p. Jappelli, S.J., infine, è stato possibile esaminare gli appunti manoscritti del defunto p. Errichetti, S.J., certamente uno dei massimi conoscitori del complesso, ma anche in tali appunti non v'è traccia di notizie sulle meridiane.

## 4. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Il valore del complesso delle meridiane, che si è cercato di mettere in evidenza, induce a ritenere auspicabile un restauro accurato che possa riportare alla luce anche parti ricoperte in precedenti interventi.

Nel caso venissero così evidenziati elementi significativi delle meridiane che si sospetta essere state interamente ricoperte, sarebbe anche da esaminare la possibilità di una loro rifazione sia pure in parte congetturale.

Il monumento potrebbe così riassumere quasi nella sua interezza il significato originale.

## BIBLIOGRAFIA

[Alisio 1966] Alisio G., *Il Gesù Vecchio a Napoli*, Napoli Nobilissima 5, 1966.

[Amodeo 1905] Amodeo F., *Vita matematica napoletana, Parte prima*, R.Tipografia Francesco Giannini e Figli, Napoli 1905.

[Amodeo 1924] Amodeo F., *Vita matematica napoletana, Parte seconda*, Tipografia dell'Accademia Pontaniana, Napoli 1924.

[Calendario 1812] *Calendario per l'anno scolastico della R. Università degli studi di Napoli che comincia dal dì 5 Novembre 1812 e termina a tutto Agosto 1813. Approvato da S.E. il Ministro dell'Interno,* stampato in Napoli presso Angelo Trani.

[Cintio 1992] Cintio A., *Programmi al computer per la costruzione di sette tipi di orologi solari*, L'Astrofilo, Brescia 1992.

[Cutolo 1933] Cutolo A., *L'Università di Napoli*, Napoli 1933.

[Errichetti 1960] Errichetti M., S.J., *L'architetto Giuseppe Valeriano (1542-1596) progettista del Collegio napoletano del Gesù Vecchio*, Arch. Stor. Prov. Napoli, 1960.

[Errichetti 1976] Errichetti M., S.J., *L'antico collegio massimo dei Gesuiti a Napoli (1552-1806)*, Campania Sacra 7, 1976, 170-264.

[Fantoni 1988] Fantoni G., *Orologi solari*, Technimedia, Roma 1988.

[Gatto 1994] Gatto R., *Tra Scienza e Immaginazione. Le matematiche presso il collegio gesuitico napoletano (1552-1670 c.a.)*, Olschki, Firenze 1994.

[Gianpriamo 1748] Gianprianmo N., *Specula Partenopaea Uranophilis juvenibus excitata, auctore P.Nicolao Gian-Priamo Neapoli Excudiebat Regius Typographus Seraphinus Porsile 1748-1749.*

[Giorgetti Casanovas 1981] Giorgetti D., Casanovas J., S.J., *L'orologio solare della badia di Grottaferrata*, Boll. Badia greca Grottaferrata (n.s.) 35, 1981, 6-15.

[Girolamo di S.Anna 1708] Girolamo Maria di S.Anna, *Della istoria genealogica della famiglia Del Ponte patrizia romana e napoletana*, Napoli 1708.

[La Lande 1769] La Lande, J.J. Le François de, *Voyage d'un François en Italie, foit dans les années 1765 et 1766*, Venise, 1769.

[La Lande 1792] La Lande, J.J. Le François de, *Astronomie*, De Saint, Paris, 1792.

[Mancuso 1998] Mancuso S., *La Meridiana di G.Casella nel Palazzo dei Regi Studi*, in *Testimonianze matematiche a Napoli*, a cura di L. Carbone e F. Palladino, La Città del Sole, Napoli 1998.

[Napoli 1930] *Napoli, le opere del Regime*, Napoli, 1930.

[Pinto 1990] Pinto A., *Il restauro risolve una questione storica: Chiostro cinquecentesco (P.De Rosis) e/o Cortile del Salvatore (P.Valeriano)*, 39, 1990, 58-68.

[Pinto 1991] Pinto A., *Il restauro della sede del Dipartimento di Diritto Romano e Storia della Scienza Romanistica nel Complesso del Salvatore*, Fridericiana 1, 1991, 61-72.

[Ragozzino Schettino 1988] Ragozzino T., Schettino E., *Early Instruments of the Institute of Physics*, CUEN, Napoli 1988.

[Rigassio 1988] Rigassio G.C., *Le ore e le ombre*, Mursia, Milano 1988.

[Rohr 1988] Rohr R.J.R., *Meridiane*, Ulisse Edizioni, Torino 1988.

[Romano Notarangelo Vanzin 1991] Romano G., Notarangelo M., Vanzin E., *Il sole e il tempo. Un 'indagine sulle meridiane nel Trevigiano*, SIT Editrice, Treviso 1991.

[Rotili 1955] Rotili M., *Il Cortile del Salvatore*, Roma 1955.

[Zach 1819] Zach, baron de, *Correspondance géografique, hydrographique et statistique du Baron de Zach, Second Volume*, chez A. Ponthemer, imprimeur-fondeur, Gênes 1819.

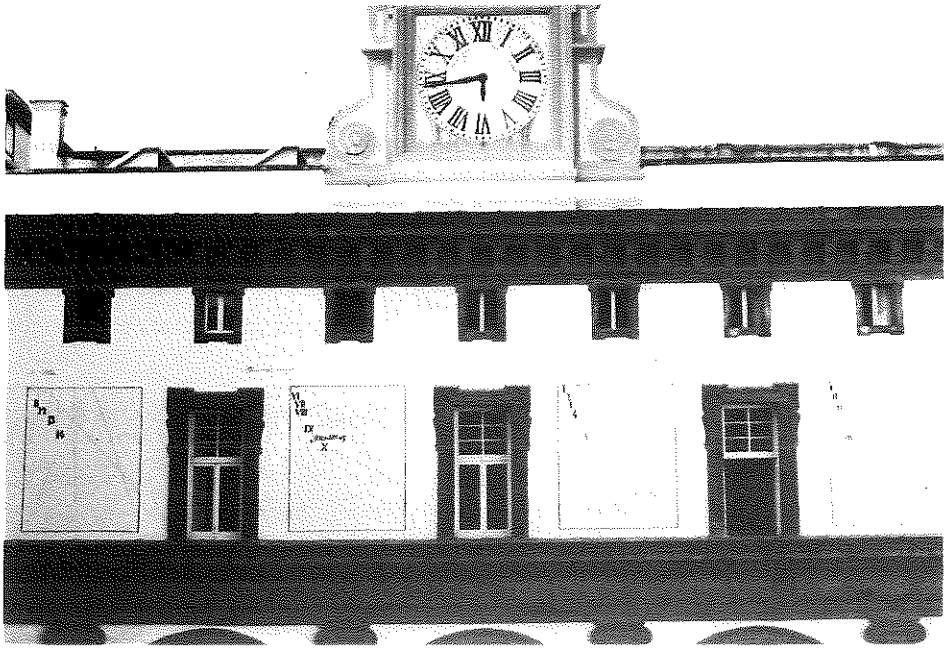

Fig. 1. *Veduta d'insieme del complesso delle Meridiane nel Cortile delle Statue. Da sinistra a destra si susseguono la meridiana ad ore italiche, quella ad ore astronomiche, quella ad ore babilonesi, quella ad ore stagionali.*

Fig. 2. *La Meridiana nel Cortile delle Statue ad ore italiche.*

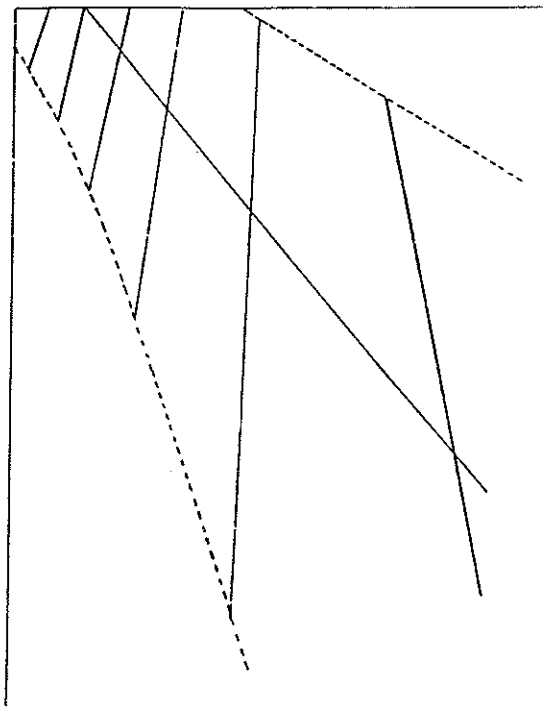

Fig. 3. *Progetto, eseguito con un opportuno programma di calcolo, di una meridiana a ore italiche alla latitudine di Napoli, d'azimut 110° e distanza zenitale 90°.*

*Le linee tratteggiate costituiscono due tratti di iperbole e indicano le posizioni dell'ombra dello stilo quando il sole è ai due solstizi, quella superiore al solstizio d'inverno, quella inferiore al solstizio estivo; la linea compresa tra essa è un segmento di retta e indica la posizione dell'ombra dello stilo quando il sole è all'equinozio.*

*Le linee che intersecano queste curve (linee orarie) rappresentano le posizioni dell'ombra dello stilo alle ore XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI (da sinistra a destra).*

*L'ombra della punta dello stilo al variare del giorno nel corso dell'anno si muove lungo la linea oraria a partire dall'intersezione di questa con la linea del solstizio estivo fino alla intersezione con la linea del solstizio invernale.*

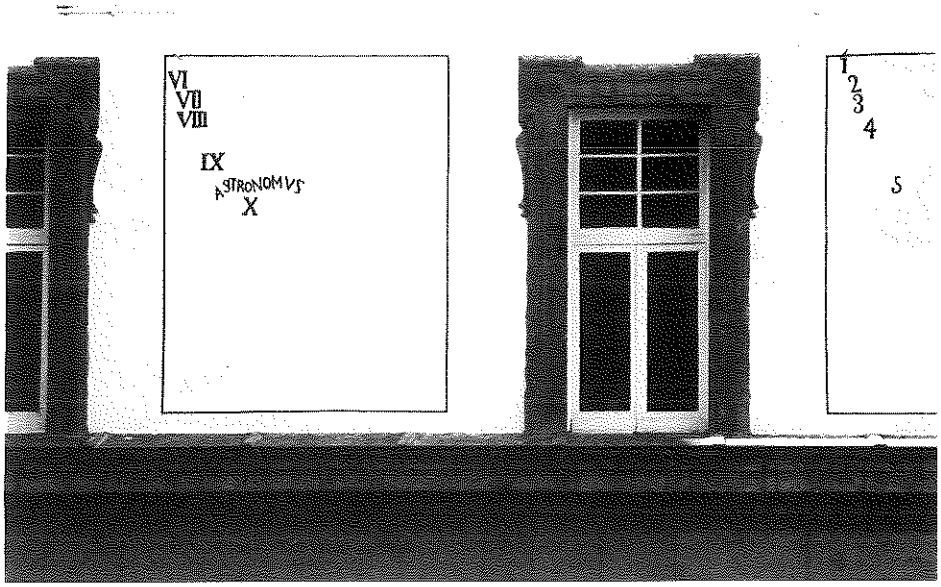


Fig. 4. *La Meridiana nel Cortile delle Statue ad ore astronomiche.*

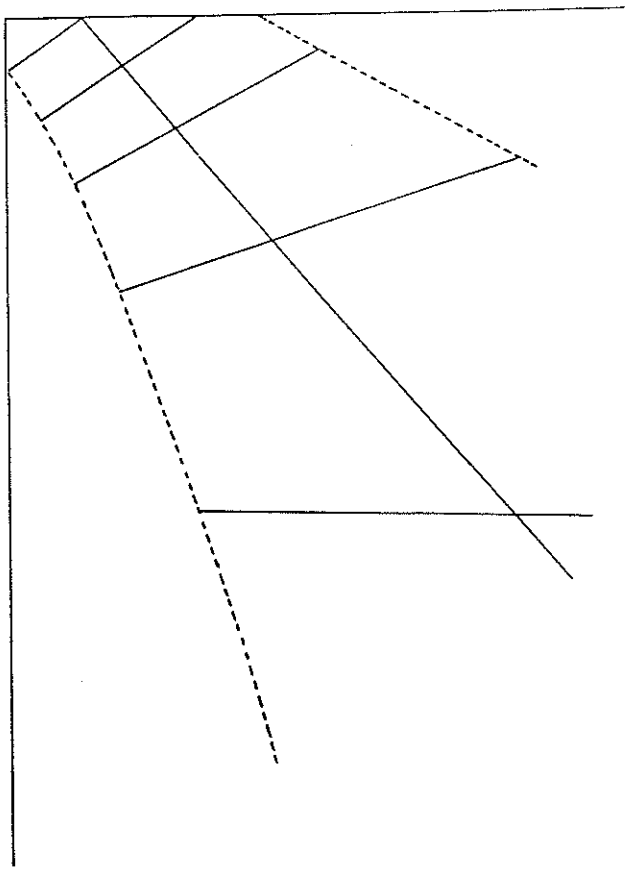

Fig. 5. *Progetto, eseguito con un opportuno programma di calcolo, di una meridiana a ore astronomiche alla latitudine di Napoli, d'azimut 110° e distanza zenitale 90°.*

*Le linee orarie sono relative alle ore VI, VII, VIII, IX, X.*

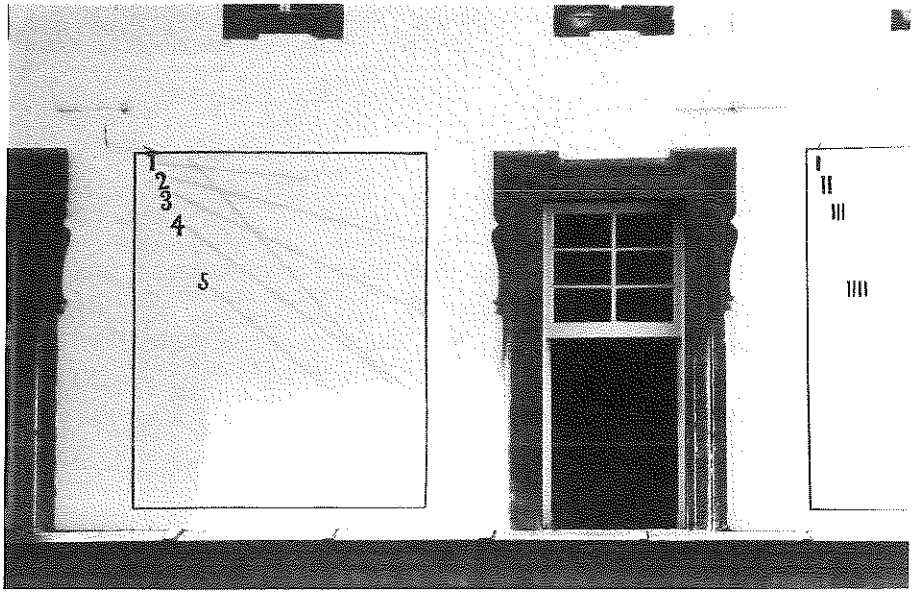


Fig. 6. *La Meridiana nel Cortile delle Statue ad ore babilonesi.*

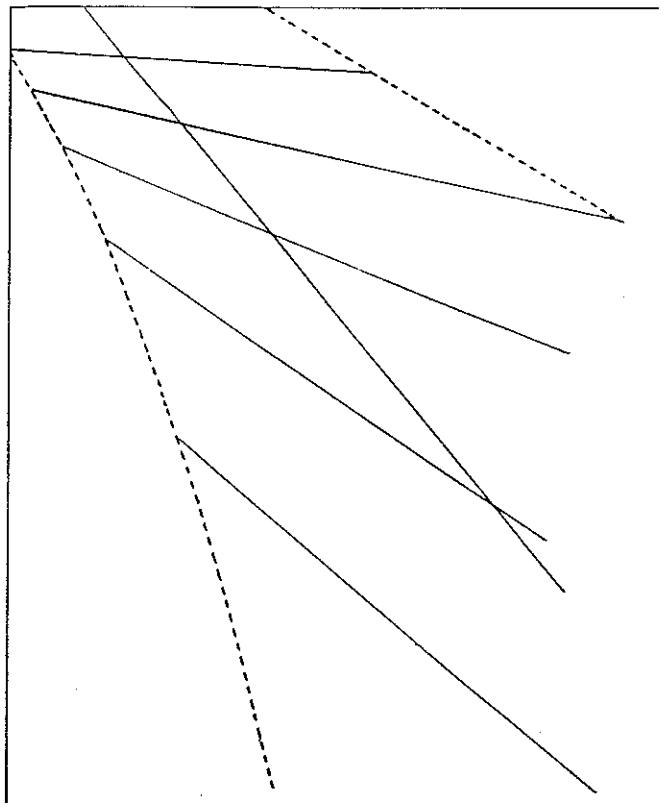

**Fig. 7.** *Progetto, eseguito con un opportuno programma di calcolo, di una meridiana a ore babilonesi alla latitudine di Napoli, d'azimut 110° e distanza zenitale 90°.*

*Le linee orarie sono relative alle ore I, II, III, IV, V.*

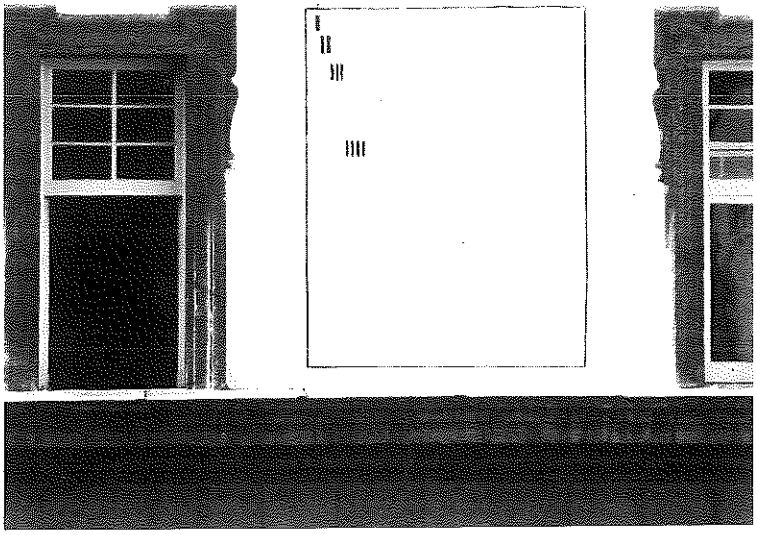

Fig. 8. *La Meridiana nel Cortile delle Statue ad ore stagionali.*

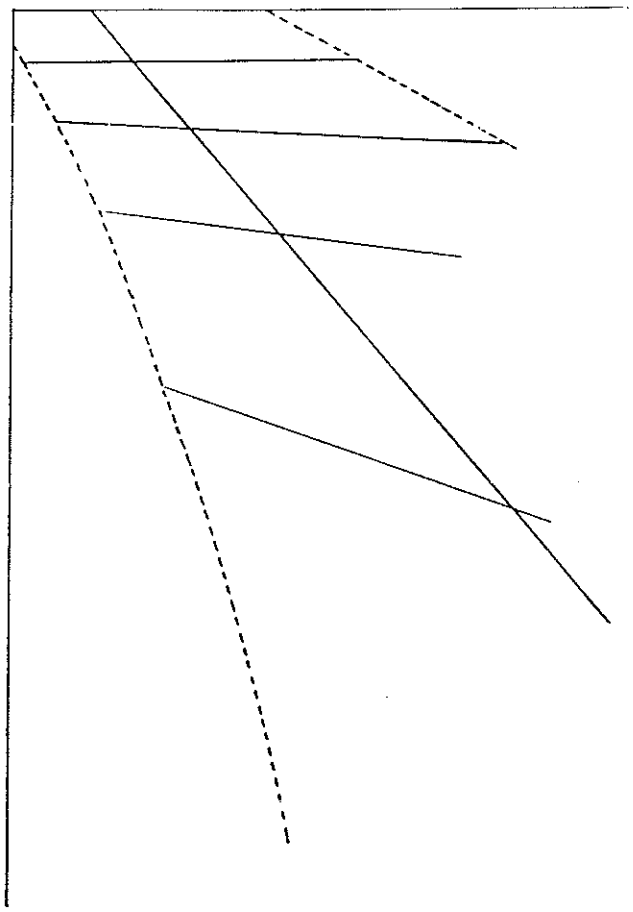

Fig. 9. *Progetto, eseguito con un opportuno programma di calcolo, di una meridiana a ore stagionali alla latitudine di Napoli, d'azimut 110° e distanza zenitale 90°.*

*Le linee orarie sono relative alle ore I, II, III, IV.*

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXV, (1997) pp. 31-66

# LA SEDE STORICA DEGLI STUDI SUPERIORI DI MATEMATICA A NAPOLI NELLA SUA ATTUALE CONFIGURAZIONE

Nota di L.Carbone* - G.Cardone** - J.Casanovas, S.J.***
S.Mancuso**** - F.Palladino*****

Presentata dal socio Luciano Carbone
(Adunanza del 9/5/1998)

**Riassunto** - Nella presente nota intendiamo descrivere gli elementi più rilevanti dell'insediamento storico degli studi di Matematica, in particolare del Gabinetto di Geometria Proiettiva e del Seminario Battaglini dal punto di vista storico, artistico, culturale, anche allo scopo di meglio garantirne la conservazione.

**Abstract** - In this work we intend to describe some relevant elements of the old Mathematical Study Centre, particularly the Projective Geometry Cabinet, the Battaglini Seminar from historical, artistic, cultural points of view, in order to preserve them better too.

* Università degli Studi di Napoli "Federico II" - Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli".

** Seconda Università degli Studi di Napoli - Dipartimento di Ingegneria Civile.

*** Specola Vaticana.

**** Università degli Studi di Napoli "Federico II" - Dipartimento di Scienze Fisiche.

***** Università degli Studi di Salerno - Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata.

## 1. INTRODUZIONE

Quando nel Novembre del 1991 il Dipartimento di Matematica e Applicazioni della Federico II si trasferì dalla sua sede storica nel complesso gesuitico del Salvatore, nel nuovo complesso universitario di Monte S.Angelo, l'unità funzionale creata nella vecchia sede da Carlo Miranda nel 1944 perdeva le sue ragioni d'essere.

In effetti Miranda aveva potuto creare (e tale creazione descrive con giusta consapevolezza in [Miranda 1977]) da una congerie di elementi disparati, qualcosa di essenzialmente nuovo e vitale: uno dei primi vasti e organici istituti policattedra.

Il centro ideale di questo istituto era costituito da un'amplissima biblioteca specializzata nel settore della matematica, ma contemporaneamente in grado di ricoprire tutti gli aspetti di questa.

Nell'interno della biblioteca, che egli curò a lungo e con profondo amore, pulsava la vita culturale della comunità dei matematici: gli studiosi non solo svolgevano il loro lavoro individuale, ma potevano reciprocamente arricchire le singole ricerche.

La comunità si costituiva in una vera scuola con due maestri: Renato Caccioppoli e Carlo Miranda stesso. Nella visione di Miranda la scuola era in grado anche di analizzare in maniera sistematica (la parola metodo ritorna spesso nelle sue conferenze[1]) e analitica gli indirizzi (e su tale termine insiste per lo più Caccioppoli[2]) che l'intuizione apriva alla ricerca. Nell'ambito della scuola, "nel comune lavoro venivano spesso a stabilirsi fra docenti e discepoli dei rapporti di stima e di affetto ... E il discepolo, una volta divenuto a sua volta

[1] Si confronti ad esempio [Miranda 1950, 1952].

[2] Si confronti ad esempio [Carbone, Cardone, Palladino 1997b].

docente, metteva un punto d'onore nel continuare le tradizioni della scuola da cui proveniva" ([Miranda 1977]).

Espressione della scuola era la rivista *Ricerche di Matematica* fondata e diretta dallo stesso Miranda agli inizi degli anni Cinquanta.

Insostituibile diveniva la "lezione cattedratica" accompagnata però da esercitazioni aventi "sempre più il carattere di seminari" che richiedevano agli studenti "una partecipazione attiva" [Miranda 1977]).

Lo stesso nuovo Dipartimento di Matematica fu realizzato dopo la morte di Miranda sotto la suggestione delle sue idee, con i naturali adattamenti dovuti soprattutto all'impetuoso sviluppo degli strumenti di Calcolo. Il trasferimento coincise così essenzialmente col trasferimento dell'unità funzionale da lui creata.

Traendo anche spunto dalla necessità contingente di creare un'organizzazione per le discipline il cui insegnamento continuava ad essere dato nella sede storica, nacque allora il problema della conservazione, attraverso i luoghi, delle memorie così a lungo coincidenti con quelle dell'intera Italia meridionale peninsulare.

## 2. LA COSTITUZIONE DELLA SEDE DEGLI STUDI MATEMATICI AGLI INIZI DEL SECOLO: LE IDEE E LE NECESSITÀ.

Quando Miranda tornò da Genova a Napoli, la situazione in cui si imbatté era assai singolare: la sede degli studi matematici era stata utilizzata dalle forze di occupazione militare alleate come sede amministrativa. I locali, gli arredi, i libri apparivano come relitti dopo un naufragio, e del loro stato lo stesso Miranda dà una vivace descrizione ([Miranda 1977]). Ingenti naturalmente i danni e addirittura dispersi gli inventari.

Di lato a questa situazione di cose, egli si trovò anche di fronte a una certa esiguità numerica di risorse umane: unici professori di ruolo di discipline

matematiche, oltre a Miranda stesso, erano Caccioppoli per l'Analisi, Spampinato per la Geometria, l'ormai anziano Nobile per l'Astronomia e Mattioli per la Meccanica Razionale.

Tale naufragio era avvenuto sì in simultanea con gli eventi bellici, ma, più profondamente, sembrava coincidere con il definitivo esaurirsi di un'organizzazione degli spazi, dei mezzi, degli uomini nella ricerca matematica frutto di una grande spinta propulsiva che aveva avuto luogo nei primi anni del Novecento sulla base di un vasto e profondo movimento di idee.

Luigi Pinto[3], il fisico-matematico Rettore dell'Università agli inizi del nuovo secolo, poteva elencare i locali che allora occupava l'Università (il complesso gesuitico del Salvatore, l'ospedale clinico di Gesù e Maria, l'ex monastero di S.Andrea delle Dame, l'ex monastero di Santa Patrizia, Sant'Aniello), osservava che in estrema penuria di spazio nel "vecchio collegio massimo dei gesuiti si danno tutte le lezioni delle Facoltà di Lettere e Filosofia, Giurisprudenza, Matematiche, Scienze Naturali, Farmacia e primo biennio di Medicina" e poteva annunciare che "È già cominciata la demolizione dell'ex-monastero della Croce di Lucca ed alla fine del prossimo mese di Giugno comincerà a demolirsi l'attiguo ex-monastero della Sapienza e fra tre anni su un'area di più di due ettari saranno allargate tutte le cliniche mediche e chirurgiche che sono oggi nell'ospedale di Gesù e Maria. E prima di questo tempo sarà finito il nuovo palazzo universitario che è in costruzione e la cui fronte sul Corso Umberto I è rappresentata dall'annessa figura ....

Questo nuovo palazzo comprenderà l'aula magna (di m. 28 × 13) tutti gli uffici del Rettorato e delle tre Accademie della Società Reale e tutte le aule per le Facoltà di Lettere e Filosofia e di Giurisprudenza. All'indietro ed isolati fra loro, sorgeranno gli Istituti di Fisica e di Chimica" ([Annuario 1899]).

---

[3] Per brevi cenni bibliografici relativi ai matematici italiani della fine del secolo passato si rinvia a [Tricomi 1962]

La realizzazione dei piani descritti, con l'acquisizione ulteriore del complesso di San Marcellino, stava per consentire finalmente alla Facoltà di Scienze Matematiche di rendere concrete quelle aspirazioni intorno alle quali da tempo si lavorava. In effetti la situazione della Facoltà non era migliore di quella del 1860. Nel 1882 il Rettore Marino Turchi aveva trasferito gli uffici Universitari e il Rettorato nei locali che si aprivano sulle due lunghe gallerie situate a ponente e mezzogiorno del secondo piano nell'antico complesso gesuitico e vi aveva fatto apporre una orgogliosa lapide, ancora presente: *Hic manebimus optime*.

In questo modo la Facoltà, che aveva utilizzato alcuni di quei locali per aule di lezioni e il cui unico Gabinetto, quello geodetico, era situato proprio in quell'area, vide ulteriormente ridotti gli spazi a sua disposizione, pur ricadendo su di essa il carico oltre che del Corso di Laurea in Matematiche, quello molto più grave del Corso di avviamento per l'Ingegneria. Così nei voti e deliberazioni presentati al Ministro della Pubblica Istruzione nel 1884 veniva lamentata l'esiguità degli spazi a disposizione del Gabinetto di Geodesia, l'inesistenza di un gabinetto per i modelli di geometria, l'assenza di dotazione fissa per le Scuole di disegno ornato topografico ed architettonico dotate di "pochi gessi ed acquerelli" ([Regia Università 1884]).

Tuttavia proprio a partire da quel periodo e probabilmente in virtù di quei voti parzialmente esauditi, si procedette tra molte difficoltà all'acquisto di varie serie di modelli geometrici anche per il disegno ([Carbone Cardone Palladino 1996]). Dal 1891 l'insegnamento del disegno trovava una stabile sistemazione nel grande Refettorio del Collegio gesuitico ([Paterna 1932]). Si ha anche notizia ([Alasia 1906], [Torelli 1923]) dell'esistenza di un'Associazione di Conferenze Matematiche, della quale era animatore l'allora giovane Torelli e che raccoglieva altri giovani matematici.

La stessa rivista *Giornale di Matematiche* alla morte di Giuseppe Battaglini, cofondatore e per molti anni direttore, col passaggio alla seconda

serie diretta da Capelli, mutava di orientamento. Da una rivista sul tipo delle *Nouvelles correspondances de Mathématiques* del Catalan o dei *Nouvelles Annales de Mathématiques* di Terquam diretta ad un pubblico vasto, costituito anche da studenti, e da un folto numero di matematici applicati (ingegneri, ufficiali del Genio, d'Artiglieria, della Marina), ricca anche di curiosità, di traduzioni, di articoli divulgativi, di lettere, diveniva una rivista assai più rigorosa nelle forme e nel contenuto, sul modello delle grandi riviste specializzate tedesche.

Proprio in Germania e nei successi conseguiti dall'intera cultura tedesca nella seconda metà dell'Ottocento va cercata la sorgente d'ispirazione profonda che animava agli inizi del secolo i docenti della Facoltà. In effetti lo stesso Capelli era stato a Berlino ove aveva seguito i corsi di Weierstrass e Kronecker ([Torelli 1911]); Del Pezzo era nato e aveva passato la prima infanzia a Berlino, ove suo padre era ministro del Regno delle Due Sicilie di Napoli ([Gallucci 1938]); Pascal era stato presso Klein ([Picone 1942]) a Göttingen; mentre Cesàro, formatosi invece a Liegi con Catalan nella scuola di Cauchy, e Torelli, a proposito dei risultati da loro ottenuti in Teoria dei Numeri sulla congettura di Tchebicheff, dovevano riconoscere la correttezza delle osservazioni di Landau radicate nella fondazione rigorosa del calcolo dovuta a Weierstrass ([Carbone Nastasi Palladino 1996]).

D'altro canto anche gli astronomi della facoltà, De Gasparis, Arminio Nobile, Fergola avevano provato direttamente l'efficienza della scienza tedesca nella controversia sulla priorità nel rilevamento della polodia che li aveva contrapposti all'Osservatorio di Berlino ([Carbone Cardone Mancuso 1996]).

Così Pascal presentando il 5 maggio 1909 la sua relazione circa i lavori di adattamento delle due gallerie e dei locali prospicienti a sede della Facoltà, osservava ([Pascal 1909]):

"Un movimento di progresso e di sviluppo cominciato fuori d'Italia da alcuni decenni e seguito lentamente anche da noi non rende più possibile un

semplicismo così nudo e anche noi sentiamo il bisogno, se vogliamo mantenerci all'altezza dei tempi, di avere gabinetti nei quali si possono raccogliere, ordinare, studiare e far studiare tutte quelle rappresentazioni grafiche e spaziali, quei modelli, quegli apparecchi e quegli strumenti che negli ultimi tempi si son venuti ideando come indispensabile sussidio a una più ampia e completa concezione dell'idea matematica".

L'immagine stessa dello scienziato in realtà aveva finito col legarsi, nel clima positivistico d'intensa esaltazione di una scienza che stava radicalmente modificando il modo di vita dell'uomo, in maniera indissolubile al gabinetto, nel quale egli conduceva le sue sperimentazioni spesso in solitudine, talora assistito da qualche tecnico o dagli studenti più motivati.

D'altro canto Pascal poteva anche sottolineare come per i vari Gabinetti molto materiale "s'era venuto già accumulando da vari anni per merito di alcuni dei nostri chiari colleghi", poiché effettivamente il processo di acquisizione e di produzione aveva subito una forte accelerazione a partire dal 1905-1906, grazie all'utilizzo delle assegnazioni straordinarie ministeriali stanziate dalla legge in favore della città di Napoli nel 1904[4], soprattutto, ed ai proventi da maggiori tasse universitarie.

Così Alfonso Del Re dava, presentando il suo programma d'insegnamento di Geometria descrittiva svolto nell'a.a. 1906-1907, un lungo elenco di modelli: alcuni acquistati, anche a sue spese, altri fatti preparare dagli studenti del Corso ([Del Re 1906]).

Cesàro, riscoprendo le tendenze giovanili verso le matematiche applicate che l'avevano spinto all'*École des Mines* di Liegi, si dedicava febbrilmente nel corso dell'a.a. 1905-1906 alla formazione delle raccolte per il Gabinetto di Calcolo Infinitesimale e procedeva non solo ad acquisti (anche per conto di

[4] Nella legge per Napoli dell'8 luglio 1904 n. 381 fu stanziato un fondo straordinario di lire 60000 annue per gli Istituti Scientifici dell'Università.

Domenico Montesano), ma anche, assistito da alcuni allievi e da un tecnico, alla costruzione di vari modelli ([Carbone Cardone Palladino 1998]).

L'arrivo nel 1907, dopo la morte di Cesàro e dell'ormai anziano Siacci, di Pascal e Marcolongo aveva segnato un'ulteriore accelerazione nella costituzione degli arredi dei Gabinetti.

Già nel 1911 Marcolongo avrebbe potuto con orgoglio elencare le acquisizioni del Gabinetto di Meccanica Razionale da lui fondato nello stesso 1907 ([R. Scuola Superiore 1911]).

Pascal, sull'esempio di Klein che prima a Monaco e poi a Gottinga aveva largamente contribuito non solo a progettare modelli per l'insegnamento delle cosiddette matematiche superiori, ma anche a diffonderne l'uso, in Europa e in America, con la sua vasta influenza, andava impegnandosi con notevole successo alla costruzione di integratori meccanici per equazioni differenziali ([Pascal 1914]).

Contemporaneamente all'istituzione dei Gabinetti un altro obbiettivo era cruciale in quel primo decennio del secolo per i matematici: la costituzione di un Seminario.

Nella struttura dell'Università tedesca il Seminario era il luogo centrale della formazione culturale ove docenti e studenti potevano incontrarsi con più libertà per approfondire e discutere argomenti più avanzati e specializzati.

"Il docente - osserva Humboldt ([Humboldt 1810]) - non esiste in funzione degli studenti, entrambi esistono in funzione della scienza; il lavoro del docente dipende anche dalla presenza degli studenti e non procederebbe felicemente senza di loro; se i discepoli non si raccogliessero spontaneamente intorno al docente, egli andrebbe a cercarli sì da avvicinarsi maggiormente alla meta grazie all'unione della sua forza addestrata, bensì, ma perciò anche più unilaterale e già meno vivace, con la loro, più debole, ma ancora meno parziale e coraggiosamente tesa verso tutte le direzioni".

"Molte occasioni si presentano naturalmente al momento di indicare ai giovani certi lavori e di incoraggiarli a ricerche, permettendo loro di chiarire il settore del loro sapere, di dissipare le nubi di cui esso è circondato e di superare la goffaggine che pesa sulle loro attività intellettuali. Solo i più seri, quelli che sono coscienti di possedere forze sufficienti non indietreggeranno di fronte a questo cammino irto di difficoltà. E se a tal punto proveranno ancora il bisogno di continuare il loro rapporto con il professore, il seminario è costituito" ([Schleiermacher 1808]).

Le Accademie, invece, rimanevano come nel Settecento il luogo di confronto e di dibattito dei soli dotti.

In assenza dei seminari e della vita scientifica che in essi pulsava, prevalendo il sistema tradizionale della lezione, "le Università italiane, divenute fabbriche di avvocati, di medici e di architetti" rischiavano di essere "tagliate fuori dal movimento nazionale" ([De Sanctis 1872], vol. III, p. 276). D'altro canto l'esistenza di un Seminario poteva offrire anche notevoli vantaggi organizzativi.

I corsi del primo biennio di matematica erano a Napoli in comune con gli aspiranti ingegneri e gli aspiranti fisici. Essi risultavano così abbastanza affollati e, nonostante le esercitazioni di sostegno tenute dai coadiutori, molti argomenti di interesse più spiccatamente matematico dovevano essere tralasciati. All'interno del Seminario potevano invece essere organizzati dei cicli di conferenze nelle quali esaminare questi argomenti.

In quegli anni, inoltre, la maggior parte dei libri e delle riviste veniva acquisita attraverso la Biblioteca Universitaria. L'impegno nel settore matematico della Biblioteca, peraltro sostanzialmente costituita nella prima metà dell'Ottocento da un matematico, Vincenzo Flauti, era consistente; venivano infatti acquisite 34 riviste specializzate ([Annuario 1907]).

Un valido contributo era anche fornito dall'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti presso la quale erano reperibili i rendiconti e le memorie di quasi tutte le accademie italiane e straniere.

Si trattava comunque di biblioteche di tipo non specializzato. Con i fondi delle singole cattedre si provvedeva invece per lo più all'acquisto di testi di uso personale dei docenti.

Il Seminario poteva invece costituire il nucleo di una biblioteca specializzata, ma di respiro più ampio di quello consentito dai singoli Gabinetti. In esso potevano essere anche raccolti e custoditi gli estratti, assai preziosi per lo studio in assenza di rapidi ed economici sistemi di fotoriproduzione.

## 3. L'ISTITUZIONE DEL SEMINARIO MATEMATICO

Sotto la spinta di queste suggestioni la Facoltà agì negli anni tra il 1905 e il 1909. La sua costituzione nel 1904-1905 era (in ordine di anzianità) la seguente:

Emanuele Fergola (Astronomia), Francesco Siacci (Meccanica Razionale), Nicola Salvatore-Dino (Geometria Analitica), Alfredo Capelli (Algebra Complementare), Luigi Pinto (Fisica Matematica), Ernesto Cesàro (Calcolo Infinitesimale), Giovanni De Berardinis (Geodesia), Pasquale Del Pezzo (Geometria Superiore), Domenico Montesano (Geometria proiettiva con disegno), Alfonso Del Re (Geometria descrittiva con disegno, Preside), Luigi Raucci (Disegno topografico ed ornamentale, straordinario) ([Annuario 1904]).

Essa poteva pertanto contare su 11 professori tra ordinari e straordinari sui circa 80 di cui consisteva l'intera Università di Napoli; era frequentata da 146 studenti per l'avviamento all'Ingegneria e 38 studenti per la laurea in Matematica su circa 4200 studenti universitari nel complesso (di cui 1600 a Giurisprudenza e 1400 a Medicina); aveva visto immatricolarsi 74 studenti nel corso per l'avviamento all'Ingegneria e 10 studenti per il corso per la laurea in Matematica su un totale di circa 1000 immatricolati (500 in Giurisprudenza, 230

in Medicina); aveva concesso 48 licenze in Matematica e Fisica (titolo preliminare per la laurea in Matematica ed in Ingegneria) e 5 lauree in Matematica su un totale di circa 650 laureati (280 in Giurisprudenza e 290 circa in Medicina) cui andavano aggiunti un 150 abilitati all'esercizio di Farmacia, un centinaio di abilitati alla pratica di notariato e una settantina di abilitati alla pratica in procura ([Annuario 1904])[5].

Il 25 marzo 1905 una Commissione appositamente nominata proponeva uno schema di progetto di massima per l'istituendo Seminario Matematico; il 3 luglio il Preside del tempo Alfonso Del Re leggeva nel Consiglio Accademico la Relazione che precedeva il progetto di massima; l'8 luglio la Facoltà approvava definitivamente la Relazione e il Progetto di massima; il 7 febbraio 1906 la Facoltà approvava il Regolamento Generale del Seminario; il 19 luglio, dopo il parere favorevole del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, una lettera ministeriale notificava l'accettazione della proposta di costituzione del Seminario ([Annuario 1906]).

Massimo promotore del Seminario fu Alfredo Capelli ([Torelli 1911]). La Facoltà nella sua proposta aveva affermato ([Annuario 1906]):

"Le conferenze del terzo anno del seminario non rappresenteranno in generale complementi di corsi ordinari dell'Università, ma costituiranno il

[5] Nell'annuario del 1904-1905 ([Annuario 1904]) è raccolta la serie degli esami sostenuti in quell'anno accademico; viene inoltre descritto il *curriculum* di studi da affrontare per chi intendesse conseguire la licenza in Matematica e Fisica o la laurea in Matematica. L'annuario del 1908-1909 ([Annuario 1908]) offre la raccolta dei programmi di esame per i corsi di matematica, dati a Napoli, di avviamento all'Ingegneria, corsi che erano seguiti anche da chi aspirava alla laurea in Matematica. Pascal nel 1910 pubblicò sul *Giornale di Matematiche* i sommari dei corsi di Matematiche Superiori svolti nelle 9 Università italiane (Torino, Pavia, Genova, Padova, Bologna, Pisa, Roma, Napoli, Catania, Palermo) ove veniva conferita la laurea in Matematica ([Pascal 1910]).

Seminario propriamente detto, cioè un campo di esercitazioni superiori dei giovani sotto la guida dei professori.

Le conferenze di quest'anno saranno perciò fatte, di regola, dai giovani stessi sopra argomenti approvati o proposti dai professori che ne prenderanno occasione ad opportune discussioni, esercitazioni, spiegazioni di memorie originali ed escursioni bibliografiche ... Queste conferenze potranno poi riuscire specialmente utili ai giovani come istradamento alla scelta ed alla trattazione delle tesi di laurea ...

Ad agevolare poi il compito dell'insegnamento ed il profitto dei giovani nel Seminario Superiore, specialmente per quanto riguarda la parte bibliografica, è necessario che i giovani dell'ultimo anno abbiano per quanto sarà possibile e sotto le debite garanzie l'accesso libero, in ore determinate, ad una sala apposita del Seminario nella quale possano trovarsi a disposizione così di essi come dei professori alcune opere più importanti ed alcuni periodici tra quelli più specialmente destinati agli studenti universitari".

Il Consiglio Superiore, di cui peraltro era membro Pasquale Del Pezzo, nell'esprimere il suo parere, esplicitamente osservava ([Annuario 1906]):

"Le dette conferenze, specialmente quelle per gli studenti del 4° anno, costituirebbero un seminario matematico conforme a quelli che nelle Università germaniche danno ottimi frutti".

Il Seminario era aperto agli aspiranti alla laurea in Fisica oltre che in Matematica e il suo regolamento fu modificato dalla Facoltà il 17 novembre 1910 ([Annuario 1911]. Esso è riportato in ([Annuario 1912]).

Nella primitiva concezione era anche prevista la possibilità di assegnare a un giovane laureato meritevole un posto di "assistente interno" remunerato con una retribuzione fissa e una gratificazione proporzionata all'opera effettivamente prestata.

L'assistente interno avrebbe dovuto avere il compito sia di dare chiarimenti agli studenti, sia di tenere cicli di conferenze complementari.

L'istituzione del Seminario risultò piuttosto delicata, in quanto il Regolamento Generale Universitario allora vigente non prevedeva esplicitamente una struttura di tale tipo. Si dovette perciò ricorrere per giustificarne l'introduzione ad una sottile serie di ragionamenti per analogia: da un lato con le scuole di Magistero, la cui azione era stata ristretta solo in un secondo momento all'insegnamento secondario, dall'altro con gli Istituti delle Facoltà giuridiche che avevano come finalità quella di specializzare e perfezionare i giovani e il cui sostegno era esplicitamente stabilito, da un articolo del Regolamento (il 151), su quote di tasse universitarie.

La biblioteca del Seminario cominciò immediatamente ad arricchirsi. Già nel 1907, alla sua morte, Siacci legò al Seminario i suoi opuscoli insieme con lettere e manoscritti dei maggiori matematici italiani della seconda metà dell'Ottocento.

Alla morte di Alfredo Capelli, nel 1910, la vedova donò insieme ai manoscritti una raccolta di libri, opuscoli ed atti accademici.

Gustavo Sannia, figlio di Achille, donò a sua volta, nel 1914, un'altra raccolta di libri, opuscoli e periodici appartenenti in gran parte a suo padre Achille.

Pascal, che fu direttore a partire dal 1908, sollecitava con assiduità l'invio in dono da parte dei cultori di matematiche di estratti e libri, sicché già nel 1914 il Seminario possedeva varie migliaia di opuscoli ([Annuario 1912, 1913, 1914]).

L'istituzione del Seminario concludeva così, a Napoli, nel settore delle scienze matematiche che non aveva subito modifiche assai significative nel periodo delle riforme postunitarie, il dibattito iniziato in Germania circa un secolo prima, al momento della costituzione dell'Università di Berlino ([Fichte 1807], [Humboldt 1810], [Schelling 1802], [Schleiermacher 1808] e in generale per il dibattito in Germania [Weischedel 1960]; [Settembrini 1861], [De Sanctis 1872], [Labriola 1896] e in generale per il dibattito anche in Italia e in

particolare a Napoli [Tessitore 1970]; per le riforme postunitarie [Torraca *et alii* 1924]).

## 4. LA COSTITUZIONE DELLE SEDI PER I GABINETTI E PER IL SEMINARIO

Nel 1909 la Facoltà era ormai profondamente mutata rispetto al 1905: a Siacci deceduto nel 1907, era subentrato nella Meccanica Razionale, Marcolongo; Cesàro, deceduto nel 1906, era stato sostituito da Gabriele Torelli nel Calcolo Infinitesimale; divenuto emerito Fergola, la cattedra di Astronomia era stata trasformata in Analisi Superiore e su di essa era stato chiamato Ernesto Pascal; il defunto Raucci era stato sostituito da Leonardo Paterna Baldizzi su Disegno di Architettura e da Arturo Tricomi su Disegno di Ornato, entrambi straordinari ([Annuario 1908]). Tuttavia i suoi intenti non erano mutati. Nella sua relazione del 5 maggio Pascal poteva con giusto orgoglio affermare ([Pascal 1909]) innanzi ad essa:

"Ma non posso lasciarvi, senza esprimervi, cari Colleghi, l'intimo compiacimento da cui è invaso l'animo mio, nel vedere che un gran sogno si avvia rapidamente mercé la vostra saggezza alla sua realizzazione. E il gran sogno è questo: che la Facoltà Matematica dell'Università di Napoli possa diventare la prima d'Italia, per la grandiosità e la larghezza del suo impianto e della sua sede, per gli aiuti che può concedere ai giovani che accorrono a lei, e che nella sua Biblioteca, nei suoi Gabinetti, nelle sue preziose raccolte, nella sua stessa organizzazione possano trovare tutto quello di cui hanno bisogno per imparare e produrre. Di questo gran sogno, oramai la parte materiale è fatta".

Rimaneva solo da onorare i matematici illustri napoletani del passato; osservava infatti ancora Pascal:

"Io penso che quelle due lunghe gallerie che danno accesso alle nostre aule e gabinetti e che ora sono mute potranno acquistare nuova vita e splendore quando noi le avremo popolate delle immagini, dei medaglioni, delle lapidi che

ricordino ai giovani queste glorie delle nostre Facoltà che sono glorie del Mezzogiorno".

Gli ambienti assegnati alla Facoltà, dopo il trasferimento del Rettorato consistevano in 20 sale disposte lungo le due vaste gallerie, già menzionate, allocate al secondo piano del collegio gesuitico: la galleria a ponente, che correva parallela al Cortile delle Statue, sul lato delle Meridiane e dell'Orologio, e a Via Mezzocannone; la galleria a meridione che correva lungo la fiancata del Gesù Vecchio e un lato del Cortile del Salvatore; le due gallerie si incontravano ad angolo retto in prossimità di un ampio finestrone d'affaccio su quella che un tempo era stata la Biblioteca del Collegio e che era da tempo divenuta il Museo di Mineralogia.

Furono questi i locali ad essere riadattati per ospitare alcune aule, qualche auletta, il Seminario Matematico e 9 Gabinetti.

I Gabinetti erano i seguenti:

- il Gabinetto di Analisi Superiore, diretto da Pascal;
- il Gabinetto di Calcolo Infinitesimale, diretto da Torelli, di cui era stato assistente Alfredo Perna;
- il Gabinetto di Fisica-Matematica, diretto da Pinto;
- il Gabinetto di Geodesia, diretto da De Berardinis, di cui era assistente Giovanni Cicconetti;
- il Gabinetto di Geometria Analitica, diretto da Salvatore-Dino, di cui era assistente Tocchi;
- il Gabinetto di Meccanica Razionale, diretto da Marcolongo, di cui era stato assistente Armando Palomby;
- il Gabinetto di Geometria Superiore, diretto da Montesano;
- il Gabinetto di Geometria descrittiva, diretto da Del Re, di cui era assistente Tommaso Mari;
- il Gabinetto di Geometria proiettiva, diretto da Del Pezzo, di cui era assistente Enrico Ascione;

A tutti i 9 Gabinetti era addetto Gennaro Belliazzi, l'antico custode della sola Geodesia ([Annuario 1911]).

Altrove erano invece localizzati i due rimanenti Gabinetti della Facoltà destinati al Disegno:

- Il Gabinetto di Disegno d'ornato, diretto da Tricomi, di cui era assistente Giuseppe Giuliani;
- il Gabinetto di Disegno d'architettura, diretto da Paterna Baldizzi, di cui era assistente Roberto Stampa ([Annuario 1911] e [Paterna 1932]).

Pascal nella sua relazione non dà però elementi precisi per la localizzazione delle aule e dei Gabinetti. È Miranda invece a fornire una descrizione abbastanza accurata di ciò che egli vide all'inizio dei suoi studi universitari nel 1927, assai utile per la ricostruzione dei luoghi, naturalmente con qualche incertezza per i rimaneggiamenti avvenuti nel quindicennio intercorso.

Il Gabinetto di Geometria Proiettiva occupava le 4 sale all'estremità non di incrocio della galleria a mezzogiorno, un tempo sede del Gabinetto di Geodesia e conteneva al suo interno una auletta; il Gabinetto di geodesia si situava nelle due sale all'estremità non di incrocio della galleria a ponente; il Seminario Matematico era sistemato in due vaste sale sulla galleria a ponente affrontata allo scalone d'ingresso e prospicienti via Mezzocannone; ad esso adiacente era il Gabinetto di Meccanica Razionale che occupava altre due sale; due aulette si trovavano ancora nella galleria a ponente ai due lati del grande finestrone; un'aula era nella galleria a ponente in adiacenza al grande scalone d'accesso.

Assai più incerta appare invece la localizzazione dei rimanenti gabinetti.

Per quanto concerne il gabinetto di Geometria Proiettiva, Paterna Baldizzi ([Paterna 1932]) dà anche qualche notizia concernente l'arredamento.

Egli ricorda infatti "gli stalli di legno noce, di stile barocco che circondavano le pareti al di sotto delle altissime e grandi finestre" nel refettorio della Casa dei Gesuiti e aggiunge:

"gli ultimi sono stati divelti e collocati nell'attuale gabinetto di geometria proiettiva - Rettore il Duca Pasquale Del Pezzo (1909-11); - e ricordo di aver veduto il pergamo del lettore durante la mensa, pieno di polvere, diviso a pezzi, abbandonato nella Chiesa di S.Marcellino unitamente ad altre suppellettili". Del Pezzo utilizzò gli stalli per l'auletta inclusa nel suo gabinetto salvando così quello che rimaneva di un illustre monumento ligneo concepito nel Seicento da Dionisio Lazzari e completato intorno al 1684 ([Celano 1692])[6].

Poco oltre Paterna Baldizzi osserva ancora:

"In seguito [dopo il 1910 n.a.] ho progettato e diretto le scaffalature dello Studio del collega Del Pezzo Duca di Caianiello, una sala di stile moderno che risente dello stile imperiale, prediletto dal collega illustre. Le scansie sono nascoste da pannelli ornati con corone di alloro, legate a nastri con sottili intrecci moderni"[7].

Una seconda sala del gabinetto era arredata da un'altra imponente scaffalatura che ricopriva tutte intere tre pareti ed era sovrastata da un ballatoio.

---

[6] Il Celano così descrive il refettorio ([Celano 1692] gior. III p. 182 s.): "Il cenacolo o refettorio ultimamente terminato che né più bello né più allegro far lo potrebbe l'istessa allegrezza. Fu maestosamente architettato da Dionisio Lazzeri capace di centinaia di Padri. I sedili sono di finissimo legname di noce ben lavorati, oltre della vaghezza de' stucchi sta adornato di bellissimi quadri, opera di Domenico di Marino, e sopra la sedia del Superiore vi è il tanto rinomato quadro del Salvatore opera la più bella che sia uscita dal pennello di Leonardo Guelfo detto il Pistoia".

[7] Il recupero degli stalli non fu un operazione isolata o episodica. Negli anni di una poderosa riorganizzazione del tessuto urbano napoletano resa necessaria dall'insalubrità di interi quartieri e dalla volontà di adattare vecchi complessi a nuove funzioni, numerosi intellettuali cercarono di salvare quanto era possibile dei monumenti del passato destinati a perire. Fu, ad esempio, proprio Pasquale Del Pezzo insieme con Benedetto Croce (è Del Pezzo il "Pasqualino" della corrispondenza Croce - Gentile) a far sì che un portale durazzesco del demolito palazzo Pappacoda fosse adattato nel 1921 all'ingresso dell'Università in Via Mezzocannone 8 ([Gallucci 1938]).

In una terza sala, infine, in bacheche appositamente costruite trovavano quasi certamente posto le collezioni di modelli. L'arredo del Gabinetto si è in buona misura conservato a tutt'oggi.

Lo stesso Paterna Baldizzi dà anche qualche notizia sull'arredo del Seminario Matematico al quale aveva contribuito nel 1910 col progetto di una lavagna mobile andata perduta, ricordando la presenza di tavoli con piano in lavagna e mensole in "artistico ferro battuto" ([Paterna 1932]).

Nello stesso Seminario furono realizzate le ultime aspirazioni espresse da Pascal: una sala di studio fu dedicata a Battaglini e in essa fu collocato un busto del Battaglini stesso, frutto di una pubblica sottoscrizione voluta ancora una volta dal Capelli che ne dettò anche l'epigrafe ([Torelli 1911]).

Ad un medaglione collocato nella stessa sala fu affidata l'effigie dello stesso Capelli che, morto prematuramente, non poté neanche scoprire il busto di Battaglini.

Il medaglione fu scolpito nel 1911 da Enrico Mossutti. La pubblica sottoscrizione cui si appellò il Comitato formato dalla Facoltà e costituito da Del Pezzo, De Berardinis e Pascal vide partecipare 167 sottoscrittori e furono raccolte 1028,85 lire ([Del Pezzo De Berardinis Pascal 1911]).

Un terzo medaglione raffigurante Trudi completò la decorazione statuaria della Sala.

La splendida decorazione marmorea è ancora oggi lì custodita.

Un'idea di come dovevano apparire il Gabinetto di Meccanica Razionale con le sue ricche collezioni di libri, opuscoli e strumenti la fornisce lo stesso Marcolongo a più riprese ([Regia Scuola Superiore 1911], [Marcolongo 1935]) e la descrizione del 1935, ormai una rievocazione da parte di un uomo ritiratosi

dall'insegnamento anche in maniera brusca[8], è dettagliata, sentita, commossa, orgogliosa:

"Pure nell'anno 1908 e dopo pochi mesi del mio trasferimento a Napoli fu fondato l'Istituto di Meccanica razionale che da più di venticinque anni è oggetto delle mie cure più assidue.

Ora esso ha sede nei locali assegnati alla Facoltà di Scienze in due sale: in una assai ampia sono situati i modelli e serve altresì di sala di studio per gli assistenti e i laureandi; l'altra più piccola è per il Direttore e la ricca biblioteca situata in una bella scaffalatura che riveste tutta la sala".

"La biblioteca è ricca di più di ottocento volumi ..., 200 opuscoli a stampa di tesi e di dissertazioni inaugurali italiane e straniere; 15 periodici scientifici ...; tutte le copie manoscritte e rilegate delle tesi di laurea eseguite nell'Istituto, [del]la mia collezione di memorie scientifiche con relativo catalogo, e ricca di oltre 6500 opuscoli di matematici italiani e stranieri e pure una ricca iconografia matematica.

Negli appositi scaffali addossati alle pareti della sala maggiore si conservano strumenti e modelli matematici che fanno dell'Istituto il più ricco ed il più completo di quanti ne esistano in Italia ed all'estero".

Marcolongo dà poi una lista degli strumenti e modelli più significativi, alcuni dei quali "costruiti da studenti allievi ingegneri e laureandi" sotto la

---

[8] Nella copia del citato opuscolo [Marcolongo 1935] conservata nella raccolta di estratti ed opuscoli, prima descritta, si può leggere la seguente amara dedica: "A Giulio Andreoli, ultimo ricordo del liquidato maestro. Marzo 1936". In una lettera inviata il primo marzo 1936 ad Amodeo, e conservata nel fondo omonimo, Marcolongo scrive: "Mio caro Amodeo, Tu forse non sapevi che dallo scorso ottobre ho definitivamente abbandonato Napoli - ed è stato il più gran dolore della mia vita. ... Quando mi mandarono via dall'insegnamento - ed il modo ancor m'offende - io feci la mia necrologia in un opuscolo: Quarant'anni di insegnamento, stampato, a mie spese, dalla Siem ...".

direzione sua e dell'assistente Mario Pascal ([Carbone Cardone Palladino 1998]) e così conclude:

"Nella sala maggiore dell'Istituto una parete è fregiata dei ritratti di coloro che dal 1850 occuparono la cattedra di Meccanica razionale; precisamente: Michele Zanotti, Remigio Del Grosso, Fortunato Padula, Dino Padelletti e Francesco Siacci, le cui opere maggiori e le memorie scientifiche sono religiosamente conservate nella piccola, ma preziosa biblioteca dell'Istituto".

Il Gabinetto di Geodesia è ben descritto ad esempio nella ricognizione generale degli istituti e dei gabinetti promossa da Pinto all'alba del secolo ([Annuario 1899]).

Di quanto era contenuto in altri gabinetti qualche traccia può essere desunta dalla corrispondenza di Cesàro ([Carbone Cardone Palladino 1998]) e dal già citato opuscolo di Del Re ([Del Re 1906]).

I gabinetti, soprattutto quello di Geometria Proiettiva, ma anche quello di Meccanica Razionale, ancora grazie a Del Pezzo e a Marcolongo, si arricchirono di edizioni antiche di classici della Matematica, rare e di pregio.

L'aspetto del complesso dei gabinetti doveva realmente essere imponente: una testimonianza si è conservata nella Relazione del Congresso della Mathesis a Napoli del 1921 ([Relazione 1922]):"Si passa poi a visitare i magnifici istituti di Matematiche della Università di Napoli" ([Cardone 1996]).

In quell'occasione fu anche organizzata un'esposizione dei materiali più significativi contenuti nei gabinetti, accompagnata da esperienze pratiche. Marcolongo ebbe così occasione di chiarire i fondamenti della didattica cui molte collezioni erano finalizzate, inserendoli nel più vasto movimento della scuola attiva:

"Ma fate che il professore venga alla lezione armato di modelli, di fogli di carta (meglio se colorati): che faccia prima osservare, sperimentare e poi dedurre e legiferare e tutti vedranno (come qualche volta ho visto io) un cambiamento di scena; la scolaresca si anima, comprende e (permettetemi la

frase) digerisce tutto. ... Insomma bisogna operare e fare operare, risvegliare certe facoltà che in maggiore o minor grado ciascuno di noi possiede, inculcare anche dalla Cattedra di matematica che se è bello, sublime seguire i voli della fantasia, le esigenze più estremiste del rigore, è ugualmente bello ed utile scendere alle applicazioni; bisogna, in altre parole, anche in matematica essere più fattivi, direi quasi più dinamici" ([Marcolongo 1922]).

## 5. IL DECLINO

Un numeroso complesso di fattori incise nel determinare, durante il trentennio intercorso tra la costituzione del Seminario e dei Gabinetti, la profonda differenza tra l'orgoglioso quadro delineato da Pascal e quanto rilevato da Miranda.

Un'analisi accurata potrebbe riposare solo su un'indagine approfondita intorno alla matematica italiana del periodo, indagine attualmente agli inizi e per la quale non sono ancora completamente disponibili, ad esempio, le raccolte epistolari.

Tuttavia è possibile delineare, sia pure sommariamente, alcuni elementi.

Certamente agirono alcuni fattori di carattere piuttosto casuale: ad esempio i matematici più brillanti della generazione che vide l'unificazione del paese, come Trudi, Battaglini, De Gasparis, Fergola furono longevi ed operosi anche in tarda età, mentre gli elementi più brillanti della prima generazione postunitaria ebbero sorte ben diversa: Caporali morì suicida ancor giovane, Cesàro e Capelli scomparvero nel pieno della maturità scientifica, Del Re, cui peraltro veniva attribuito un carattere aspro e litigioso ([Tricomi 1962]), negli ultimi anni fu costretto da una grave malattia a ritirarsi a Sorrento e, più triste ancora, forse, sarebbe stato il destino di Pascal.

L'interesse per la vita pubblica attirò egualmente sia la generazione a cavallo dell'unità, nella quale furono assai attivi Siacci e Salvatore-Dino, sia quella postunitaria che vide emergere Del Pezzo.

La fusione della Facoltà di Matematica con quella di Scienze Naturali, avvenuta in quel lasso di tempo, ebbe come esito la riduzione delle cattedre di matematica che passarono dalle 11 dell'anno accademico 1904-1905 (di cui una peraltro di disegno) alle 5 del 1947, mentre il numero complessivo delle cattedre nell'università napoletana saliva da un'ottantina a circa 130.

Altri fattori però sembrano avere agito più in profondità e con più generalità.

I docenti della prima generazione postunitaria conseguirono, per lo più, la cattedra universitaria già nell'ultimo decennio dell'Ottocento con la prospettiva di occuparla fino alla fine degli anni Venti di questo secolo. Naturalmente le generazioni degli anni Settanta e Ottanta del secolo passato dovettero subire e considerare la situazione come un blocco oggettivo ostacolo alle proprie aspirazioni. Già Miranda ([Miranda 1977] 10,11) nota una diversità: osserva infatti che tra i laureati dal 1890 al 1910 conseguirono la cattedra universitaria solo Vittorio Nobile, figlio di Arminio, Gustavo Sannia, figlio di Achille, e Salvatore Cherubino, mentre tra il 1863 e il 1890 su circa 100 laureati ben 14 vi erano riusciti, e suggerisce l'ipotesi che l'istituzione del Seminario fosse legata al tentativo di porre rimedio alla situazione.

Il quadro culturale matematico, inoltre, si stava modificando notevolmente sotto la spinta del logicismo e del formalismo.

Da questo punto di vista assai gravi sembrano essere stati la perdita di Capelli e i gravi problemi di Del Re che fu assai attento agli sviluppi della logica.

Anche il quadro culturale generale si andava profondamente modificando: le correnti filosofiche neo-idealistiche che avevano prevalso sul positivismo,

tendevano a negare vero valore conoscitivo alle scienze e in particolare alle matematiche.

Infine (ma certamente non ultimo in importanza) agì il primo conflitto mondiale che colpì uomini e idee.

Ancora una volta Pascal è un testimone assai acuto (e quasi presago di avvenimenti ancor più gravi), sia pure da un'ottica italiana ([Pascal 1915]):

"Questa guerra atroce ha reso tristemente pensosi gli intellettuali di tutto il mondo, e specialmente poi gli innumerevoli amici e ammiratori della grandezza germanica.

Avevamo un po' tutti riposato all'ombra di quella gigantesca cultura, e tutti ci eravamo raffigurata una Germania pacifica maestra di scienze, amante dell'ordine e del progresso, tenera sino allo scrupolo di ogni più elevata manifestazione dello spirito umano, protettrice di ogni arte e di ogni scienza. [...]

Da un giorno all'altro quella stessa Germania ci è apparsa sotto una forma inaspettata; assalitrice, rapace, incurante di ogni legge divina e umana, distruggitrice delle più mirabili opere del genio, sovvertitrice di ogni valore umano, tendente diritta, tenace ed unita ad opere di distruzione e di barbarie. [...]

Una lunga dialettica, che mai come ora si è mostrata luminosamente vuota e sbagliata, avea creata [...] la persuasione che certi ricorsi selvaggi non fossero più possibili nell'erudita Europa occidentale del secolo ventesimo. [...]

Pochi anni fa parve grande audacia la proclamazione, da un'altra tribuna, della bancarotta della scienza; ora i fatti hanno per conto loro solennemente proclamata la bancarotta della civiltà".

Il 9 settembre 1915 scompariva Ruggero Torelli, figlio di Gabriele, nato a Napoli il 7 giugno 1884 e già libero docente in Matematica a Pisa. Dopo aver accompagnato in bicicletta un convoglio militare, sorpreso dalla notte, si soffermò in un accampamento militare sulle rive dell'Isonzo. Ma non volle

riposare sotto la tenda preferendo sistemarsi su di un carretto ove fu trovato morto calmo e sereno la mattina seguente.

"Si dice che alcuni giorni prima avesse avuto un primo attacco del male, ma che egli non se ne fosse curato e non avesse voluto dirlo per timore di essere esonerato dal servizio militare!" ([Pascal 1915]).

Il 23 novembre 1915 moriva, a Conca Bosco Lancia, Giulio Cesàro, figlio di Ernesto, nato a Portici il 14 luglio 1893. Una copia dattiloscritta di una lettera del Tenente Colonnello Augusto Franchi dal 10° Fanteria, indirizzata alla madre Angelina Cesaro è conservata nel fondo Cesaro:

"Il suo povero Giulio è caduto da prode. È il triste annunzio che debbo darle con vivissimo dolore. Era al mio seguito come aiutante maggiore del battaglione e disimpegnava il suo ufficio con molto zelo e coraggio. Nella famiglia del reggimento si stabiliscono sentimenti di affetto tra superiore ed inferiore e per il suo Giulio nutrivo fiducia poiché oltre che di coraggio aveva nobili pensieri di affezione per tutti. Una granata nemica me lo ferì mortalmente! La sua salma giace in luogo sicuro"[9].

Il 28 gennaio 1918 cadeva Alberto Pascal, nato il 24 dicembre 1894, figlio di Ernesto, che ancor prima di laurearsi aveva dato vari contributi soprattutto nella storia della matematica.

Insignito già prima della morte di due medaglie d'argento al valore "contribuì nel suo ultimo giorno alla splendida vittoria di Monte Val Bella e cadde mentre il suo lavoro di preparazione andava sviluppandosi, mentre egli vedeva dall'alto le nostre truppe avanzare nei varchi fatti aprire dall'artiglieria

[9] Giulio Cesàro, figlio di Ernesto, alla prematura morte di questi sembrò volerne seguire le tracce. Assai giovane si trasferì a Liegi per frequentare l'*École des Mines*. Cadde sul fronte italiano. È citato nella lapide commemorativa dedicata dall'Università di Liegi agli universitari deceduti nella Grande Guerra. Di lui si conserva nel fondo Cesàro una breve nota di natura didattica sui determinanti.

di cui egli aveva diretto i tiri": così scriveva lo zio Carlo nel trigesimo della morte.

I nomi citati sono i più noti: nel conflitto scomparvero vari studenti e laureati in matematica cui spesso, per le loro conoscenze, venivano affidati compiti di direzione dei tiri di artiglieria e che pertanto si trovavano assai esposti.

D'altro canto varie ricerche svolte nell'ambito della Facoltà di Matematiche napoletana potevano considerarsi inserite nello sforzo militare prebellico: ad esempio Siacci era stato uno dei maggiori esperti europei di balistica e l'artiglieria italiana all'inizio del conflitto faceva uso delle tavole di tiro da lui messe a punto, ed uno dei massimi successi ottenuti da Ernesto Pascal nell'integrazione meccanica dell'equazioni differenziali fu appunto la costruzione di un integrafo per l'equazione fondamentale della balistica, l'equazione dell'odografo ([Siacci 1870], [Pascal 1914]).

Della generazione degli anni Novanta, tra i sopravvissuti, Giulio Andreoli e Francesco Tricomi, figlio di Arturo, ebbero un brillante avvenire scientifico (pervennero alla cattedra nel 1925).

Così tra la fine degli anni Venti e gli inizi degli anni Trenta la prima generazione di matematici nata nell'Italia unita concluse la sua parabola scientifica ed esistenziale senza eredi.

Si tentò di colmare i vuoti con alcuni illustri scienziati non napoletani: Gaetano Scorza, Mauro Picone, Antonio Signorini, che ben presto però furono attirati dal prestigio dell'Università romana. D'altro canto, citando ancora Miranda, "per motivi politici l'atmosfera della Facoltà divenne irrespirabile", cenno velato quasi certamente alle serie di eventi che avrebbe avuto come naturale sbocco nel 1943, al momento della caduta del regime, la destituzione di Andreoli, mentre diverse furono le scelte di Tricomi che finirono col portarlo a Torino ([Tricomi 1967]).

Tuttavia a partire dalla metà degli anni Trenta molti fermenti erano già attivi. Una nuova generazione, che non aveva partecipato alla grande Guerra, raccoltasi intorno a Picone, stava ormai raggiungendo la piena maturità scientifica. Essa era costituita da Caccioppoli, il più anziano, le cui riflessioni sull'Analisi non lineare, compiute tra il 1931 e il 1936, già fungevano da stimolo per l'intero gruppo, da Cimmino, Scorza Dragoni e dallo stesso Miranda.

La popolazione studentesca dell'Università di Napoli stava passando dai circa novemila iscritti in media per anno del quinquennio 1935/36 - 1939/40 ai ventimila in media del quinquennio 1944/45 - 1948/49; contemporaneamente i laureati passavano da una media di mille e cinquecento a una media di duemila e quattrocento, mentre il numero dei professori di ruolo rimaneva essenzialmente stabile (circa centotrenta) ([Annuari 1940, 1941, 1947]).

Dall'allargata base di reclutamento stava infine emergendo quel gruppo di giovani formato da Stampacchia, Greco, Ciliberto, Stoppelli che validamente avrebbe coadiuvato Miranda nella sistemazione dell'Istituto appena fondato.

## 6. LE TRASFORMAZIONI EFFETTUATE DA CARLO MIRANDA

Negli anni tra il 1910 e il 1930 il complesso dei gabinetti matematici si arricchì di un'aula e di alcuni ambienti situati in una terza galleria, più ridotta, posta a Mezzogiorno lungo il Cortile delle Statue e la chiesa del Salvatore e costruite, in sopraelevazione, presumibilmente durante i notevoli lavori di ampliamento eseguiti dal 1926 al 1929 ([Pinto 1991]).

Miranda[10] nel 1944, utilizzando quasi come trampolino questa galleria, riuscì ad annettere all'Istituto che nasceva i vasti locali sul lato meridionale un

[10] Naturalmente per maggiori dettagli sulla trasformazione si può consultare [Miranda 1977].

tempo sede dell'Istituto di Fisica Sperimentale. In questi nuovi locali fu collocata la biblioteca che divenne così il baricentro dell'area matematica.

Le trasformazioni compiute furono profonde: caddero subito i gabinetti minori; quello di Meccanica Razionale lasciò un'eco della sua esistenza nel nome di un'aula da esso ricavato: l'aula Marcolongo; resistette fino al 1951, data di collocamento a riposo di Vittorio Nobile, il Gabinetto di Geodesia (divenuto nel frattempo di Geodesia e Astronomia); gli strumenti di quest'ultimo furono trasferiti all'Istituto di fisica Terrestre. Scomparve la sala lettura del Seminario Matematico.

Da tale spinta di rinnovamento fu preservato però quanto di meglio era stato prodotto: la Sala Battaglini, il Gabinetto di Geometria Proiettiva (che s'era trasformato, al ritiro di Del Pezzo, nell'Istituto di Analisi Superiore).

I vari fondi costituiti da libri, periodici, opuscoli dei gabinetti e del Seminario confluirono nella Biblioteca ormai unificata.

Pochi furono gli strumenti e i modelli che si poterono salvare, ma il loro uso didattico e la loro importanza concettuale andavano ormai rapidamente scemando all'interno di una Matematica ove sembravano prevalere la formalizzazione e l'astrazione.

## 7. LE SCELTE AL MOMENTO DEL TRASFERIMENTO

Naturalmente il trasferimento dell'unità funzionale creata da Miranda e incentrata sulla biblioteca rendeva ormai inutili i vasti spazi, peraltro di recente aggregazione, sulla quale essa insisteva insieme con i servizi correlati.

L'unica strada percorribile per conservare una memoria storica delle attività matematiche, sembrò essere quella di fermare l'attenzione proprio su quanto era sopravvissuto all'unificazione voluta da Miranda: la Sala Battaglini e il Gabinetto di Geometria Proiettiva.

In tali aree, già di per sé ben conservate, valeva la pena di concentrare tutti i beni di interesse storico del Dipartimento: i modelli e gli strumenti ancora esistenti, gli opuscoli e gli estratti, i libri antichi, i fondi (anche manoscritti ed epistolari), gli arredi di maggior pregio.

Una Commissione nominata dal Consiglio di Dipartimento si curò di individuare con precisione i materiali da lasciare nella sede storica. Il Consiglio di Dipartimento nella seduta del 17 ottobre 1991 approvò il lavoro della Commissione e deliberò la dislocazione del materiale di interesse storico così individuato nella Sala Battaglini e nel Gabinetto di Geometria Proiettiva.

## 8. LE COLLEZIONI DI MODELLI E STRUMENTI, LA RACCOLTA DI ESTRATTI ED OPUSCOLI, I FONDI

Trovano dunque posto attualmente nella Sala Battaglini e nel Gabinetto di Geometria Proiettiva anche le collezioni di modelli e strumenti e la raccolta di estratti ed opuscoli.

Lo studio e la risistemazione di quanto sopravvissuto delle antiche collezioni di modelli e strumenti presenti nei gabinetti, iniziata già qualche anno prima del trasferimento, è ormai assai ben avviata e si può rinviare per notizie a [Palladino 1992], [Carbone Cardone Palladino 1996], [Carbone Cardone Palladino 1998]. Le perdite comunque in tale settore sono state terribili.

La risistemazione della raccolta di estratti ed opuscoli è iniziata dopo il trasferimento e si può ora ritenere che sia arrivata ad un livello soddisfacente. In effetti, caduto l'uso degli estratti, con l'avvento di efficienti tecniche di fotoriproduzione, un po' dappertutto le raccolte persero d'interesse. Nel caso di quella napoletana il catalogo è andato disperso ed essa finì in una soffitta.

Attualmente consta di circa 24000 estratti ed opuscoli raggruppabili in 3 componenti.

La prima componente di circa 18000 elementi custoditi in circa 200 faldoni è costituita dalla cosiddetta *Miscellanea*. In essa sono rifluiti gli opuscoli sciolti conservatisi dal Seminario Matematico (ivi incluse le donazioni Siacci, Capelli, Sannia) e dai vari Gabinetti, e vi furono aggiunti nel 1962 gli opuscoli e gli estratti della donazione Caccioppoli.

La seconda componente, detta convenzionalmente *Seminario*, è costituita dagli opuscoli, legati in volume, un tempo contenuti nel Seminario (ivi incluse ancora le donazioni Siacci, Capelli, Sannia) e nei vari gabinetti; consta di un centinaio di volumi per circa 3500 estratti. Gran parte dei volumi facevano parte del Gabinetto di Geometria Proiettiva; un loro carattere distintivo è il dorso rilegato in pergamena e contengono gli estratti appartenenti a Del Pezzo e, in misura ridotta, a Caporali.

La terza componente è costituita dagli estratti ed opuscoli della Donazione Cesàro, acquisita nel 1987. Si tratta di circa 2500 estratti raccolti in circa 50 faldoni e una decina di volumi [Carbone Cardone Palladino 1997 a,b].

Delle tre componenti esistono cataloghi per autore. Nella prima e nella terza componente (naturalmente in quest'ultima eccezion fatta per i volumi) gli estratti e gli opuscoli sono ordinati per anno di pubblicazione.

Il gravoso lavoro di catalogazione è stato effettuato dal signor Guglielmo Avallone, coadiuvato dal signor Ignazio Lombardi.

Si sta ora procedendo ad individuare nella *Miscellanea*, e nel *Seminario* laddove possibile, i nuclei afferenti alle più rilevanti donazioni. Il lavoro è concluso per la donazione Caccioppoli, i cui estratti e opuscoli, in numero di circa 1500, furono inseriti nella Miscellanea muniti di un timbro identificativo.

Per quanto concerne i fondi documentari si può senz'altro rinviare a [Carbone Cardone Palladino 1997 a,b] per il vasto e complesso *Fondo Cesàro*, a [Carbone Gatto 1997] per il *Fondo Siacci*, a [Carbone Cardone Palladino 1998] per il *Fondo Caccioppoli* e alle bibliografie contenute in tali articoli.

Il piccolo *Fondo De Berardinis* è costituito essenzialmente dalla corrispondenza intercorsa tra il 1903 e il 1915 fra il Gabinetto di Geodesia, diretto proprio dal De Berardinis, e l'Università: si tratta di circa 40 documenti, alcuni dei quali relativi all'acquisto di strumenti geodetici ([Carbone Cardone Palladino 1998]).

Al *Fondo Sannia* è forse possibile attribuire un solo documento: una lettera di Ettore Caporali presumibilmente ad Achille Sannia ([Carbone Cardone Palladino 1996]).

Il *Fondo Pinto* si limita ai titoli delle tesi d'esame di Fisica Matematica relative agli anni 1915/16 - 1918/19.

Una copia di lavoro, per una nuova edizione, delle Lezioni di Analisi Algebrica costituisce essenzialmente il *Fondo Capelli*, insieme con un elenco delle pubblicazioni di Capelli stesso, mentre sono presenti nel fondo Pascal una decina di lettere scritte per lo più da docenti dell'Università e riguardanti la compilazione dell'annuario universitario 1913-14, curato per l'appunto da Pascal.

Nel *Fondo Torelli* si sono conservati una relazione manoscritta sulla tesi di laurea di Michele Cipolla e le copie, anch'esse manoscritte, di alcuni articoli ([Carbone Nastasi Palladino 1996]).

È infine in via di acquisizione il *Fondo Amodeo*, nel quale è presente una ricca corrispondenza.

Vale forse la pena di osservare che parte delle raccolte di Marcolongo (essenzialmente quella costituita dalle riviste scientifiche) fu donata all'allora Istituto di Matematica dai suoi eredi ([Miranda 1977], 22), ma le sue carte personali e l'importante epistolario, che tanta luce gettano sul problema dell'unificazione del sistema delle notazioni vettoriali, sono stati donati più di recente al Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo" dell'Università La Sapienza di Roma ([Terlizzi 1993], [Carbone Cardone Palladino 1994]).

Si è potuto, grazie ai timbri identificativi, riattribuire ai singoli gabinetti il loro contenuto librario, enucleandolo dalla massa di circa 3500 volumi, pubblicati anteriormente alla prima guerra mondiale, che costituiscono il patrimonio librario storico del Dipartimento. Si sono potuti così costituire dei cataloghi speciali.

È emerso anche in questo settore un quadro di grande ricchezza soprattutto, come accennato, per il Gabinetto di Geometria Proiettiva e per quello di Meccanica Razionale. Molte opere antiche presenti nel Gabinetto di Geometria Proiettiva, ad esempio, sono risultate provenire dalla celebre raccolta di Gilberto Govi, formata da oltre 4000 volumi rari e dispersa qualche decennio dopo la sua morte ([Wolinski 1890]); i volumi a lui appartenenti sono ben individuati dalla sua firma e da una data, forse quella di acquisto.

## 9. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Il Gabinetto di Geometria Proiettiva e la Sala Battaglini con le loro decorazioni lignee e marmoree, con le raccolte di strumenti, modelli, opuscoli, documenti, manoscritti, lettere, libri antichi in essi disposti, finiscono col costituire così un esempio, forse unico in Italia, di un istituto matematico con annesso seminario del periodo a cavallo tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento.

È auspicabile che altri fondi e collezioni vadano in un prossimo futuro ad arricchire le già vaste raccolte esistenti.

## BIBLIOGRAFIA

[Alasia 1906] Alasia C., *Giulio Bellavitis. La correspondance scientifique*, L'enseignement mathématique, 7, 1906, 104-116.

[Annuario 1899] *Annuario della R.Università degli Studi di Napoli pel 1899-1900. Anno DCLXXVI di sua fondazione*, Stab. Tipografico della Regia Università di Alfonso Tessitore e figlio, Napoli 1900.

[Annuario 1904] *Annuario della R.Università degli Studi di Napoli pel 1904-1905. Anno DCLXXXI di sua fondazione*, Stab. Tipografico della Regia Università di Alfonso Tessitore e figlio, Napoli 1905.

[Annuario 1906] *Annuario della R.Università degli Studi di Napoli pel 1906-1907. Anno DCLXXXIII di sua fondazione*, Tipografia della Regia Università, Ditta Alfonso Tessitore e C., Napoli 1907.

[Annuario 1908] *Annuario della R.Università degli Studi di Napoli pel 1908-1909. Anno DCLXXXV di sua fondazione*, Stab. Tipografico della Regia Università Achille Cimmaruta, Napoli 1909.

[Annuario 1909] *Annuario della R.Università degli Studi di Napoli. Volume unico pel 1909-10 e 1910-11. Anni DCLXXXV e DCLXXXVI di sua fondazione*, Stab. Tipografico della Regia Università Achille Cimmaruta, Napoli 1912.

[Annuario 1911] *Annuario della R.Università degli Studi di Napoli. Anno scolastico 1911-12 (anno DCLXXXVIII di sua fondazione)*, Tipografia della R. Università Achille Cimmaruta, Napoli 1913.

[Annuario 1912] *Annuario della R.Università degli Studi di Napoli. Anno scolastico 1912-13 (anno DCLXXXIX di sua fondazione)*, Tipografia della R. Università Achille Cimmaruta, Napoli 1913.

[Annuario 1913] *Annuario della R.Università degli Studi di Napoli. Anno scolastico 1913-14 (anno DCLC di sua fondazione)*, Tipografia della R. Università Achille Cimmaruta, Napoli 1914.

[Annuario 1914] *Annuario della R.Università degli Studi di Napoli. Anno scolastico 1914-15 (anno DCLCI di sua fondazione)*, Tipografia della R. Università Achille Cimmaruta, Napoli 1915.

[Annuario 1940] *R.Università degli Studi di Napoli. Annuario per l'anno accademico 1940-41 (anno DCCXVII di sua fondazione)*, G.U.F. "Mussolini" - Sezione editoriale, Napoli 1941.

[Annuario 1941] *Università degli Studi di Napoli. Annuario per gli anni accademici 1941-42 -- 1946-47*, Stab. Tip. G.Genovese, Napoli 1947.

[Annuario 1947] *Università degli Studi di Napoli. Anni accademici 1947-48 - 1948-49 e 1949-50*, Stab. Tip. G.Genovese, Napoli 1950.

[Bagnulo Palladino] Bagnulo S., Palladino F., *Sul recupero della corrispondenza del matematico Ernesto Cesàro (1859-1906)*, Fridericiana, 2, 1911, 115-123.

[Breve Notizia 1873] *Breve notizia della R.Università di Napoli per l'Esposizione Universale di Vienna*, Stamperia del Fibreno, Napoli 1873.

[Carbone Cardone Mancuso 1996] Carbone L., Cardone G., Mancuso S., *Il fenomeno della variazione della latitudine a corto periodo: gli studi di Arminio Nobile e la controversia con Ernesto Cesàro*, Memorie della Società Astronomica Italiana (in corso di pubblicazione).

[Carbone Cardone Palladino 1994] Carbone L., Cardone G., Palladino F., *La corrispondenza epistolare tra Ernesto Cesàro e Roberto Marcolongo*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli (4) 61, 1994, 123-188.

[Carbone Cardone Palladino 1996] Carbone L., Cardone G., Palladino F., *Le Collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di matematica e applicazioni "R.Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II"*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli (4) 63, 1996, 33-65.

[Carbone Cardone Palladino 1997a] Carbone L., Cardone G., Palladino F., *Cesàro's Nachlass*, Sciences et Techniques en Perspective, (II), 1, 1997, 2, 405-413.

[Carbone Cardone Palladino 1997b] Carbone L., Cardone G., Palladino F., *Il Fondo Cesàro: costituzione, recupero e consistenza*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, (4) 64, 1997, 217-278.

[Carbone Cardone Palladino 1997c] Carbone L., Cardone G., Palladino F., *Una conferenza stenografata di Renato Caccioppoli*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat Napoli, (4) 64, 1997, 361-396.

[Carbone Cardone Palladino 1998] Carbone L., Cardone G., Palladino F., *Le Collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di matematica e applicazioni "R.Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II": Cataloghi e documentazione*, (in corso di preparazione).

[Carbone Gatto 1996] Carbone L., Gatto R., *Il Fondo Siacci*, Nuncius (in corso di pubblicazione).

[Carbone Nastasi Palladino 1996] Carbone L., Nastasi P., Palladino F., *I carteggi Torelli-Cesàro, Landau-Cesàro, Cipolla-Cesàro e alcune questioni connesse*, Nuncius 11, 1996, 151-225.

[Cardone 1996] Cardone G., *Il Congresso della Mathesis del 1921: Roberto Marcolongo ed i modelli matematici*, in *Cento anni di Matematica, Atti del Convegno "Mathesis Centenario 1895-1995", Una presenza nella cultura e nell'insegnamento*, Fratelli Palombi Editori, Roma 1996, 147-152.

[Celano 1692] Celano C., *Notizie del Bello, dell'Antico e del Curioso della città di Napoli (1692)*, Napoli 1692.

[Del Pezzo De Berardinis Pascal 1911] Del Pezzo P., De Berardinis G., Pascal E., *Sottoscrizione per un ricordo marmoreo nella Sala Battaglini della R. Università di Napoli al Prof. Alfredo Capelli*, 1911.

[Del Re 1906] Del Re A., *Insegnamento di Geometria descrittiva*, Napoli 1906.

[De Sanctis 1872] De Sanctis F., *La scienza e la vita* in *Saggi critici*, a cura di N. Cortese, Napoli 1932.

[Fichte 1807] Fichte J.G, *Deducirter Plan einer zu Berlin errichtenden höheren Lehranstalt*, in Sämtliche Werke, a cura di J.H. Fichte, Berlin 1845-46, III, 97-204.

[Gallucci 1938] Gallucci G., *Pasquale Del Pezzo*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli (4) 8, 1938, 162-167.

[Gianpriamo 1748] Gianpriamo N., *Specula Partenopaea Uranophilis juvenibus excitata, auctore P.Nicolao Gian-Priamo Neapoli Excudiebat Regius Typographus Seraphinus Porsile 1748-1749.*

[Girolamo di S.Anna 1708] Girolamo Maria di S.Anna, *Della istoria genealogica della famiglia Del Ponte patrizia romana e napoletana*, Napoli 1708.

[Humboldt 1810] Humboldt, K.W. v. *Über die innere und äussere Organisation der höheren wissenschaftlichen Anstalten in Berlin* in *Gesammelte Schriften*, Königlich-Preussische Akademie der Wissenschaften, Politische Denkschriften, vol. I, Berlin 1803, 250-260, in *Werke in fünf Bänden*, Stuttgart 1960 e segg. (a cura di Flitner-Giel) IV, 255-266, tradotto in italiano in W.v. Humboldt, *Università e umanità*, a cura di F. Tessitore, Guida Editori, Napoli 1970.

[Labriola 1896] Labriola A., *L'Università e la libertà della scienza*, Napoli 1896.

[Marcolongo 1922] Marcolongo R., *Materiale didattico ed esperienze nell'insegnamento*, Giornale di Matematiche, (3) 60, 1922, 1-14.

[Marcolongo 1935] Marcolongo R., *Quaranta anni d'insegnamento*, SIEM, Napoli 1935.

[Masoni 1898] Masoni U., *La R. Scuola d'applicazione per gli ingegneri di Napoli*, Tipografia dell'Accademia Reale delle Scienze diretta da Michele De Rubertis, Napoli 1884.

[Miranda 1950] Miranda C., *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo*, Rend. Sem. Mat. Roma, (5) 9, 1950, 346-353.

[Miranda 1952] Miranda C., *Gli integrali principali nella teoria del potenziale*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 24, 1952/53, 107-122.

[Miranda 1977] Miranda C., *Breve storia e prospettive future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) 44, 1977, 1-38.

[Monografie 1913] *Monografie dell'Università e degli Istituti Superiori*, Ministero della Pubblica Istruzione, Roma 1913.

[Napoli 1930] *Napoli, le opere del Regime*, Napoli 1930.

[Notizie 1884] *Notizie intorno all'origine, formazione e stato presente della R.Università di Napoli per l'esposizione Nazionale di Torino nel 1884. Rettore Luigi Capuano*, Tipografia dell'Accademia Reale delle Scienze diretta da Michele De Rubertis, Napoli 1884.

[Palladino 1985] Palladino F., *Ernesto Pascal e gli integrafi per equazioni differenziali*, Annali dell'Istituto e Museo di storia della scienza 10, 1985, 67-76.

[Palladino 1992a] Palladino F., *Antichi strumenti e modelli matematici conservati a Napoli e a Pisa*, Physis 29, 1992, 833-847.

[Palladino 1995] Palladino F., *Sul recupero della corrispondenza del matematico E.Cesàro (1859-1906)*, in *Aspetti della Matematica italiana del Novecento*, a cura di L.Carbone e A.Guerraggio, La Città del Sole, Napoli 1995, 111-125.

[Pascal 1909] Pascal E., *Relazione letta dal Prof. Ernesto Pascal alla Facoltà Matematica della Università, nella seduta del 5 maggio 1909, circa l'adattamento degli antichi locali degli Uffici a nuova sede della Facoltà stessa*, Tipografia della R.Università, Achille Cimmaruta, Napoli 1909.

[Pascal 1910] Pascal E., *Sommari dei Corsi monografici di Matematiche Superiori dettati nelle Università italiane nell'anno 1909-10*, Giorn. di Matematiche (3) 48, 1910, 169-182.

[Pascal 1914] Pascal E., *I miei integrafi per equazioni differenziali*, Libreria di B.Pellerano, Napoli 1914.

[Pascal 1915] Pascal E., *Notiziario*, Giornale di Matematiche (3) 53, 1915, 190, 316.

[Paterna 1932] Paterna Baldizzi L., *La scuola di disegno di Architettura della Regia Università di Napoli dalle origini al 1931, X° dell'E.F.*, Reale Tipografia Pansini, Napoli 1932.

[Picone 1942] Picone M., *Ernesto Pascal*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli (4) 12, 1942.

[Regia Scuola Superiore 1911] *Regia Scuola Superiore Politecnica di Napoli. Nella ricorrenza del Primo Centenario MDCCCXI - MCMXI*, Stabilimento Tipografico cav. Nicola Jovene et Co., Napoli 1911.

[Regia Università 1884] *La Regia Università di Napoli a S.E. l'on. Ministro di Pubblica Istruzione. Voti e deliberazioni della Facoltà di Medicina, di Scienze Naturali e di Matematiche sulle dotazioni agli Istituti Scientifici ed altri bisogni dell'Insegnamento*, Tipografia dell'Accademia Reale delle Scienze diretta da Michele De Rubertis, Napoli 1884.

[Relazione 1922] *Atti della Società Italiana di Matematiche "Mathesis". Relazione del Congresso di Napoli 13-16 ottobre 1921*, Per. di Mat. (4) 2, 1922, 90-110.

[Rionero 1996] Rionero S., *Alcuni aspetti della Scuola Matematica napoletana: fantasia matematica e proiezione internazionale*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli (4) 63, 1996, 131-148.

[Schelling 1802] Schelling F.W.J., *Vorlesungen über die Methode des akademischen Studium*, in *Sämtliche Werke*, Stuttgart-Augsburg (1856-1861) a cura di K.F.A. Schelling, V, 207-352.

[Schleiermacher 1808] Schleiermacher F.D.E., *Gelegentliche Gedanken über Universitäten in deutschem Sinn, nebst ein Anhang über eine neue zu errichtende*, in *Sämtliche Werke*, a cura di Reimer, Berlin 1846, I, 535-644. Tradotto in italiano con introduzione di D'Alessandro L., in Schleiermacher F., *Sull'Università*, La Città del Sole, Napoli 1995.

[Settembrini 1861] Settembrini L., *Collezione delle leggi, de' decreti e di altri atti riguardanti la Pubblica Istruzione promulgati nel già Reame di Napoli dall'anno 1861 in poi*, Napoli 1861-62.

[Siacci 1870] Siacci F., *Corso di Balistica*, Stamperia dell'Unione Tipografico-Editrice, Torino, Vol. I (1870), Vol. II (1875-1884), Vol. III (1884).

[Terlizzi 1993] Terlizzi G., *Roberto Marcolongo: un fondo di lettere e manoscritti*, Rivista di Storia della Scienza, (2) 1, n. 1, Hoepli 1993, 227-233.

[Tessitore 1970] Tessitore F., *Il modello humboldtiano di Università*, in W. v. Humboldt, *Università e umanità*, a cura di F. Tessitore, Guida Editori, Napoli 1970, 6-32.

[Torelli 1911] Torelli G., *Alfredo Capelli* in [Annuario 1910], 169-184.

[Torelli 1923] Torelli G., *La facoltà matematica di Napoli nel periodo dal 1860 al 1875*, Atti Acc. Pont., 53, 1923, 83-90.

[Torraca *et alii* 1924] Torraca F., Monti G.M., Filangieri di Candida R., Cortese N., Schipa M., Zazo A., Russo L., *Storia della Università di Napoli*, Riccardo Ricciardi Editore, Napoli 1924, ristampa anastatica Il Mulino, 1993.

[Tricomi 1962] Tricomi F.G., *Matematici italiani del primo secolo dello stato unitario*, Mem. Acc. Sc. Torino (4) 1, 1962.

[Tricomi 1967] Tricomi F.G., *La mia vita di Matematico attraverso la cronistoria dei miei lavori*, CEDAM, Padova 1967.

[Weischedel 1960] Weischedel W., *Idee und Wriklichkeit einer Universität zu Berlin*, Berlin 1960.

[Wolinski 1890] Wolinski A., *Il Professor Gilberto Govi*, Stab. Tip. Civelli, Roma 1890.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXV, (1997) pp. 67-92

# BOUNDARY PROBLEMS FOR DEGENERATE PARABOLIC OPERATORS OF SECOND ORDER

Nota di Nunzia A. D'AURIA, Ornella FIODO
Presentata dal Socio Guido Trombetti
Adunanza del 06.06.98

Riassunto. In questo lavoro costruiamo le soluzioni fondamentali relative a problemi al contorno per una classe di operatori parabolici degeneri.
Abstract. In this paper we construct the foundamental solutions for a class of degenerate parabolic initial-boundary value problems.

Let T be an arbitrary positive number and let *(t,y,x)* be a variable element of $[0,T]\times R^2$. In [6] and in [5], the authors have considered the following problem

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \partial_t U = (\partial_y^2 + y^2\partial_x^2)U & (t,y,x)\in ]0,T[\times]0,+\infty[\times R \\ U(t,0,x) = 0 & (t,x)\in ]0,T[\times R \\ U(0,y,x) = U_0(y,x) & (y,x)\in ]0,+\infty[\times R \end{cases}$$

and they have constructed an operator

$$K: U_0 \in C_0^\infty(]0,+\infty[\times R) \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} k(t,y,y',\xi)\underset{x\to\xi}{\mathcal{F}} U_0(y,\xi)\,d\xi,$$

in way that $KU_0$ belongs to $C^0([0,T],C^\infty([0,+\infty[\times R))$ and it is a solution of (I). Then, the operator $K$ has been extended as a linear and continuous operator from $\mathcal{E}'(]0,+\infty[\times R)$ to $C^\infty([0,T],\mathcal{D}'(]0,+\infty[\times R^n))$ such that $KU_0$ is a generalized solution of (I).

In this paper we complete this study considering, in (I), both equation and boundary conditions are not homogeneous.

The results here obtained can be used to construct parametrices and Poisson operators for degenerate parabolic operators of second order, with variable coefficients (see[3],[7],[11]).

Let us briefly describe the main results obtained in this work. Fixed $n \in N$ we denote by *(t,y,x)* a variable element of $R^{n+2} = R_t \times R_y \times R^n$. On the space $R_n$, let

(II) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j$$

be a positive definite quadratic form with constant coefficients, then we consider the degenerate parabolic operator

(III) $$L = \partial_t - \partial_y^2 - y^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\partial_{x_i}\partial_{x_j}$$

and the problem, that we denote by $P(U_0,F,H)$:

$$\begin{cases} LU(t,y,x) = F(t,y,x) & (t,y,x) \in ]0,T[\times R_y^+ \times R^n \\ U(t,0,x) = H(t,x) & (t,x) \in ]0,T[\times R^n \\ U(0,y,x) = U_0(y,x) & (y,x) \in R_y^+ \times R^n. \end{cases}$$

First we'll study the problem with regular data, and then we'll take $U_0,F,H$ in the space of compactly supported distributions. Now we enunciate the proved theorems, using classic notations.

**THEOREM** I - *There is a function* $k(t,y,y',\xi) \in C^\infty(R_t^+ \times R_y^+ \times R_{y'}^+ \times (R_n - \{0\}))$ *such that the associate operator*

$$K : U_0 \in \mathcal{S}(R_y^+ \times R^n) \to \int_0^{+\infty} dy \int_{R_n} e^{ix\xi} k(t,y,y',\xi) \underset{x\to\xi}{\mathcal{F}} U_0(y',\xi)\, d\xi \qquad d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$$

*is linear and continuous from* $\mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n)$ *to* $C^\infty(\overline{R}_t^+, \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n))$ *and the function* $KU_0$ *is a solution of the problem* $P(U_0,0,0)$; *moreover K can be extended as a linear and continuous operator from* $\mathcal{E}'(R_y^+ \times R^n)$ *to* $C^\infty(\overline{R}_t^+, \mathcal{D}'(R_y^+ \times R^n))$ *in way that* $KU_0$ *is a generalized solution of* $P(U_0,0,0)$ *where* $U_0 \in \mathcal{E}'(R_y^+ \times R^n)$.

We observe that, also if $n=1$, Theorem I improves the similar theorems in [5] and in [6].

**THEOREM** II - *Let* $k(t,y,y',\xi)$ *be the same function of Theorem I. Let F be a* $C^\infty([0,T], \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n))$ *function vanishing in a neighborhhood of manifold t=0, y=0. Then the operator*

$$M: F \to \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t-\varepsilon} dt' \int_0^{+\infty} dy' \int_{R^n} e^{ix\cdot\xi} k(t-t', y, y', \xi) \underset{x \to \xi}{\mathcal{F}} F(t', y', \xi) d\xi,$$

*is linear and continuous, it maps* $C^\infty([0,T], \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n))$ *into itself and MF is a solution of P(0,F,0). Moreover M can be extended in a linear and continuous operator from* $\mathcal{E}'(]0,T[\times R_y^+ \times R^n)$ *to* $\mathcal{D}'\left(]0,T[\times R_y^+ \times R^n\right)$ *and MF is a generalized solution of P(0,F,0) , where* $F \in \mathcal{E}'(]0,T[\times R_y^+ \times R^n)$.

**THEOREM** III - *There is a function* $n(t,y,\xi) \in C^\infty(R_t^+ \times R_y^+ \times (R_n - \{0\}))$ *such that, put*

$$N: H \in C^\infty\left(]0,T[\times R^n\right) \to \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t-\varepsilon} dt' \int_{R^n} e^{ix\cdot\xi} n(t-t', y, \xi) \underset{x \to \xi}{\mathcal{F}} H(t, \xi) d\xi, \qquad in \mathcal{D}'(R_y^+ \times R^n)$$

*N is linear and continuous from* $C_0^\infty(]0,T[, \mathcal{S}(R^n))$ *to* $C^\infty(]0,T[, \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n))$ *and NH is a solution of P(0,0,H) . Moreover N can be extended in a linear and continuous from* $\mathcal{E}'(]0,T[\times R^n)$ *to* $C^\infty(\overline{R}_t^+, \mathcal{D}'(R_y^+ \times R^n))$ *and NH is a generalized solution of P(0,0,H), where* $H \in \mathcal{E}'(]0,T[\times R^n)$.

This paper is organized as follows: in §1 we recall the topologies of the functional spaces that appear in Theorems I, II, III and some a priori estimates for regular solutions of above mentioned problems. In §2 we apply the Fourier tranform $x \to \xi$ to $P(U_0, F, H)$ and we establish a priori estimates with $\xi$ parameter. In §3 we use a change of variable and construct the solutions of new problems. Finally, in §§4, 5, 6 we prove Theorems I, II, III.

## §1. Preliminaries and a priori estimates

If $\overline{R}_y^+ = \{y \in R: y \geq 0\}$, by $\mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n)$ we denote the space of $C^\infty$ functions $\psi$ in $\overline{R}_y^+ \times R^n$ such that

$$\lim_{\substack{y \to +\infty \\ x \to +\infty}} y^h x^\beta \partial_y^k \partial_x^\alpha \psi(y,x) = 0, \qquad \forall h,k \in N_0, \forall \alpha, \beta \in N_0^n. \tag{1.1}$$

We'll consider $\mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n)$ equipped with the natural topology.

By $C^\infty([0,T], \mathcal{S}(R_y^+ \times R^n))$ we denote the space of $C^\infty$ functions $\psi$ in $[0,T] \times \overline{R}_y^+ \times R^n$ such that

$$\lim_{\substack{y \to +\infty \\ x \to +\infty}} y^h x^\beta \partial_t^l \partial_y^k \partial_x^\alpha \psi(t,y,x) = 0, \qquad \textit{uniformly in } [0,T], \tag{1.2}$$

equipped with the topology defined by the seminorms

$$(1.3) \qquad \left[y^h x^\beta \partial_t^l \partial_y^k \partial_x^\alpha \psi\right]_T = \sup_{[0,T]\times \overline{R}_y^+ \times R^n} \left|y^h x^\beta \partial_t^l \partial_y^k \partial_x^\alpha \psi\right| \qquad h,k \in N_0;\ \alpha,\beta \in N_0^n.$$

Likewise we introduce the space $C^\infty(\overline{R}_t^+, \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n))$ equipped by the seminorms (1.3), where $T$ is a generic value, and moreover the spaces $C^\infty([0,T], \mathcal{S}(R^n))$ and $C^\infty(\overline{R}_t^+, \mathcal{S}(R^n))$. Finally by $C^\infty([0,T], \mathcal{D}'(R_y^+ \times R^n))$ we denote the space of distributions on $R_y^+ \times R^n$ depending on parameter $t \in [0,T]$ such that

$$\langle u(t,y,x), \psi(y,x)\rangle \in C^\infty([0,T]) \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(R_y^+ \times R^n)$$

equipped by the seminorms

$$(1.4) \qquad \max_{[0,T]} \left|\partial_t^l \langle u(t,y,x), \psi(y,x)\rangle\right| \qquad l \in N_0,\ \psi \in C_0^\infty(R_y^+ \times R^n).$$

Similary we define the space $C^\infty(\overline{R}_t^+, \mathcal{D}'(R_y^+ \times R^n))$ provided with weak topology (see [9],[10]).

Besides the problem $P(U_0, F, H)$, we consider the following problem $P^*(0, F', H')$

$$\begin{cases} L^* U^* = F & (t,y,x) \in ]0,T[\times R_y^+ \times R^n \\ U^*(t,0,x) = H'(t,x) \quad , \quad U^*(T,y,x) = 0 \end{cases}$$

where $L^* = -\partial_t - \partial_y^2 - y^2 \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \partial_{x_i} \partial_{x_j}$ and

$$(1.5) \qquad F'(t,y,x) \in C^\infty([0,T[, \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n)) \ , \ H'(t,x) \in C^\infty([0,T[, \mathcal{S}(R^n)).$$

We'll prove a priori estimates only for a function $U$ satisfyng the problem $P(U_0, F, H)$, because, the estimates for $U^*$, solution of $P^*(0, F', H')$, are obtained in similar way. For this purpose, we introduce anisotropic seminorms: for all $m \in N_0$

$$\sigma_T(m,\psi) = \sum_{h\wedge|\alpha|+2|\beta|+2l+k\le m} \left[y^h x^\beta \partial_t^l \partial_y^k \partial_x^\alpha \psi(t,y,x)\right]_T \quad , \quad \psi \in C^\infty([0,T], \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n)),$$

$$\sigma'(m,\psi) = \sum_{h\wedge|\alpha|+2|\beta|+k\le m} \left[y^h x^\beta \partial_y^k \partial_x^\alpha \psi(y,x)\right] \quad , \quad \psi \in \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n),$$

$$\sigma_T''(m,\psi) = \sum_{|\alpha|+2|\beta|+2l\le m} \left[x^\beta \partial_t^l \partial_x^\alpha \psi(t,x)\right]_T \quad , \quad \psi \in C^\infty([0,T], \mathcal{S}(R^n)),$$

where $h \wedge |\alpha| = \max\{h,|\alpha|\}$.
We have the following

**THEOREM** 1.1 - *Let* $U(t,y,x) \in C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\overline{R}^+_y \times R^n))$ *be a solution of* $P(U_0,F,H)$. *Then, for all* $T>0$ *exists a constant* $c>0$, *indipendent of data, such that*

$$[U]_T \le c\left([U_0]+[F]_T+[H]_T\right)$$
$$\sigma_T(m,U) \le c\left(\sigma'(m+1;U_0)+\sigma_T(m+1;F)+\sigma''_T(m+1;H)\right) \quad \forall m \in N.$$

*Besides, let* $U^*(t,y,x) \in C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\overline{R}^+_y \times R^n))$ *be a solution of problem* $P^*(0,F',H')$, *then for all* $T>0$ *there is a constant* $c>0$, *independent of data, such that*

$$[U^*]_T \le c\left([F']_T+[H']_T\right)$$
$$\sigma_T(m,U^*) \le c\left(\sigma_T(m+1;F')+\sigma''_T(m+1;H')\right) \quad \forall m \in N \ .$$

The proof will be through a sequence of propositions. In all these propositions we suppose that the function $U(t,y,x)$ satisfies the hypotesis of Theorem 1.1.

**PROPOSITION** 1.2 - *For every* $h \in N_0$ *there is a positive constant* $c(T,h)$ *such that*

$$[y^h U]_T \le c(T,h)\left([(1+y^h)U_0]+[(1+y^h)F]_T+[H]_T\right). \tag{1.6}$$

Proof. Put $U=(1+t)V$, obviouly (1.6) is equivalent to

$$[y^h V]_T \le c(T,h)\left([(1+y^h)U_0]+[(1+y^h)F]_T+[H]_T\right) \tag{1.7}$$

If $h=0$, (1.7) may be proved using classical argouments (see [8]). Now we assume $h>0$ and (1.7) true for all positive intergers $h'$ such that $h'<h$. We observe that $y^h V$ is a solution of

$$\partial_t W-\partial_y^2 W-y^2\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\partial_{x_i}\partial_{x_j}W+\frac{W}{1+t}=\frac{y^h F}{1+t}-h(h-1)y^{h-2}V-2hy^{h-1}\partial_y V \tag{1.8}$$

and it satisfies the conditions

$$W(t,0,x)=0 \quad , \quad W(0,y,x)=y^h U_0 .$$

Since $y^h V \in C^\infty([0,T],\mathcal{S}([0,+\infty[\times R^n))$, $|y^h V|$ has absolute maximum at some point $P_0(t_0,y_0,x_0) \in [0,T]\times[0,+\infty[\times R^n$. We assume that $P_0$ is a positive absolute maximum point for $y^h V$ (similary in the other case).

If $t_0 = 0$, (1.7) is trivial. Let $t_0 > 0$ be. If $y_0 \in ]0,1]$, using (1.7) with $h=0$, we have

$$[y^h V]_T \le (1+T)\left([U_0]+[F]_T+[H]_T\right).$$

If $y_0>1$, being $\partial_y(y^h V)(P_0) = 0$, from (1.8) valued in $P_0$, it follows

$$y_0^h V(t_0,y_0,x_0) \le \left|y_0^h F(t_0,y_0,x_0)\right| + (1+t_0)(h^2+h)\left|y_0^{h-2} V(t_0,y_0,x_0)\right|.$$

Then in the last case, by induction we have

$$[y^h V]_T \le [y^h F]_T + c\left([(1+y^{h-2})U_0]+[(1+y^{h-2})F]_T+[H]_T\right)$$

where $c$ depends of $T$ and $h$. So in all cases (1.7) holds.□

Put $\psi_{\alpha,l}(t,y,x) = \partial_t^l \partial_x^\alpha \psi(t,y,x)$, $l \in N_0$ and $\alpha \in N_0^n$, we observe that the function $U_{\alpha,l}$ is a solution of problem $P(U_{\alpha,l}(0,y,x),F_{\alpha,l},H_{\alpha,l})$. From equality

$$(1.9)\qquad y^h U_{\alpha,l}(0,y,x) = y^h\left(\partial_y^2 - y^2\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right)^l \partial_x^\alpha U_0(y,x)$$
$$+ y^h \sum_{i+j=l-1}\left(\partial_y^2 - y^2\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right)^i F_{\alpha,j}(y,x) \qquad h \in N_0$$

it follows

$$(1.10)\qquad \left[y^h U_{\alpha,l}(0,y,x)\right] < \sigma'(h\wedge|\alpha|+2l;U_0)+\sigma_T(h\wedge|\alpha|+2l-2;F)$$

(the symbol < means $\le c$, with $c$ positive constant independent of data); therefore from Proposition 1.2 and by induction on $|\beta|$, using (1.10), one proves the following

**PROPOSITION** 1.3 - *For all* $h,l \in N_0$ *and* $\alpha,\beta \in N_0^n$, *it results*

$$\left[y^h x^\beta \partial_t^l \partial_x^\alpha U\right]_T < \sigma'(h\wedge|\alpha|+2l+2|\beta|;U_0)+\sigma_T(h\wedge|\alpha|+2l+2|\beta|;F)$$
$$+\sigma_T''(2l+|\alpha|+2|\beta|;H).$$

In order to provide further estimates, we observe now that from equation of problem $P(U_0,F,H)$ we have

$$y^h x^\beta \partial_y^2 U_{\alpha,l} = y^h x^\beta U_{\alpha,l+1} - y^{h+2} x^\beta \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\partial_{x_i}\partial_{x_j} U_{\alpha,l} \quad \text{on } ]0,T[\times]0,+\infty[\times R^n.$$

Hence, Proposition 1.3 implies

$$(1.11)\qquad \left[y^h x^\beta \partial_y^2 U_{\alpha,l}\right] < \sigma'(h\wedge|\alpha|+2l+2+2|\beta|;U_0)+\sigma_T(h\wedge|\alpha|+2l+2+2|\beta|;F) + \sigma_T''(2l+|\alpha|+2+2|\beta|;H).$$

It easy to prove the following

**LEMMA** 1.4 - *For every* $h\in N_0$, *there are two positive constants* $c_1,c_2$ *depending only on h, such that for all* $W\in C^\infty([0,T],\mathcal{S}([0,+\infty[\times R^n))$

$$\left[y^h\partial_y W\right]_T \le c_1\left[(1+y)^h\partial_y^2 W\right]_T + c_2\left[(1+y)^h W\right]_T.$$

*If h=0, then* $c_1=1$ *and* $c_2=2$.

Using Lemma 1.4 and (1.11) we see that

$$(1.12)\qquad \left[y^h x^\beta \partial_y U_{\alpha,l}\right]_T < \sigma'(h\wedge|\alpha|+2l+2+2|\beta|;U_0)+\sigma_T(h\wedge|\alpha|+2l+2+2|\beta|;F) + \sigma_T''(2l+|\alpha|+2+2|\beta|;H).$$

Finally we prove

**PROPOSITION** 1.5 - *For all* $h,k,l\in N_0$ *and* $\alpha,\beta\in N_0^n$

$$(1.13)\qquad \left[y^h x^\beta \partial_y^k \partial_t^l \partial_x^\alpha U\right]_T < \sigma'\left((h+k)\wedge(|\alpha|+k^*)+2l+2|\beta|;U_0\right) + \sigma_T\left((h+k)\wedge(|\alpha|+k^*)+2l+2|\beta|;F\right) + \sigma_T''(2l+|\alpha|+k^*+2|\beta|;H)$$

*where* $k^*=k$ *if k is even or* $k^*=k+1$ *if k is odd*.

Proof. The inequality (1.13) holds for all $h,l\in N_0$, $\alpha,\beta\in N_0^n$ and $k\le 2$ (see Proposition 1.3, (1.11) and (1.12)). Now we assume that (1.13) holds for $k'<k$ and all $h,l,\alpha,\beta$.
Being

$$y^h x^\beta \partial_y^k U_{\alpha,l} = y^h x^\beta \partial_y^{k-2} U_{\alpha,l+1} - y^{h+2} x^\beta \partial_y^{k-2}\partial_x^2 U_{\alpha,l} - 2(k-2)\, y^{h+1} x^\beta \partial_y^{k-3}\partial_x^2 U_{\alpha,l}$$

$$-(k-2)(k-3)\, y^h x^\beta \partial_y^{k-4}\partial_x^2 U_{\alpha,l} - y^h x^\beta \partial_y^{k-2} F_{\alpha,l},$$

by the inductive hypothesis, and by

$$\left((h+k-2)\wedge(|\alpha|+(k-2)^*)\right)+2 = (h+k)\wedge(|\alpha|+k^*) \le \max\left\{(h+k-2)\wedge(|\alpha|+2+(k-3)^*),(h+k-4)\wedge(|\alpha|+2+(k-4)^*)\right\}$$

we have (1.13).□

Finally we consider, on $]0,T[\times R_y \times R^n$, the following problems that we'll denote by $P_0(U_0,F)$ and $P_0^*(F')$

$$\begin{cases} LU = F & (t,y,x) \in ]0,T[\times R_y \times R^n \\ U(0,y,x) = U_0(y,x) & (y,x) \in R_y \times R^n \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} L^*U^* = F' & (t,y,x) \in ]0,T[\times R_y \times R^n \\ U^*(T,y,x) = 0 & (y,x) \in R_y \times R^n \end{cases} \tag{1.15}$$

where

$$F \in C^\infty([0,T],\mathcal{S}(R_y \times R^n)),\ U_0 \in \mathcal{S}(R_y \times R^n),\ F' \in C^\infty([0,T[,\mathcal{S}(R_y \times R^n)). \tag{1.17}$$

Introducing in $[0,T]\times R_y \times R^n$ anisotropic seminorms similar to $\sigma'$ and $\sigma_T$, we can prove

**THEOREM** 1.6 - *Let* $U \in C^\infty([0,T],\mathcal{S}(R_y \times R^n))$ $[U^* \in C^\infty([0,T],\mathcal{S}(R_y \times R^n))]$ *be a solution of* $P_0(U_0,F)$ $[P_0^*(F')]$. *Then* $\forall T>0$ *and* $\forall m \in N_0$

$$\sigma_T(m,U) \le c\left(\sigma_T(m;F) + \sigma'(m;U_0)\right) \qquad [\sigma_T(m,U^*) \le c\sigma_T(m;F')],$$

*where the constant c>0 is independent of data.*

## §2. A priori estimates for the transformed problems

Let $U$ be the function in Theorem 1.1, and let us denote by

$$\hat{U}(t,y,\xi) = \underset{x\to\xi}{\mathcal{F}} U(t,y,\xi) = \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi} U(t,y,x)\,dx$$

the Fourier transform of $U(t,y,x)$ with respect to $x$. The function $\hat{U}(t,y,\xi)$ belongs to $C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n))$ and it is solution of problem $\hat{P}(U_0,F,H)$

$$\begin{cases} \partial_t\hat{U} - \partial_y^2\hat{U} + y^2\omega^2(\xi)\hat{U} = \hat{F}(t,y,\xi) & (t,y) \in ]0,T[\times\overline{R}_y^+ \\ \hat{U}(t,0,\xi) = \hat{H}(t,\xi) & t \in ]0,T[ \\ \hat{U}(0,y,\xi) = \hat{U}_0(y,\xi) & y \in R_y^+ \end{cases}$$

where

(2.1) $$\omega = \omega(\xi) = \left( \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \right)^{1/2}.$$

Now if $U^*$ is the function of Theorem 1.1, then $\hat{U}^*(t,y,\xi) \in C^\infty([0,T], \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R_n))$ and it is solution of the problem $\hat{P}^*(0,F',H')$.

After these preliminaries, we prove

**THEOREM** 2.1 - *Let* $\hat{U}$ $[\hat{U}^*] \in C^\infty([0,T] \times \overline{R}_y^+ \times \dot{R}_n)$, $(\dot{R}_n = R_n - \{0\})$, *such that it is a rapidly decreasing with respect to y and it is a solution of* $\hat{P}(U_0,F,H)$ $[\hat{P}^*(0,F',H')]$, *for all* $\xi \in \dot{R}_n$. *Put for all* $m \in N_0$

$$\lambda_T(m,\hat{F},\xi) = \sum_{h \wedge |\alpha|+2|\beta|+2l+k \le m} \sup_{[0,T] \times \overline{R}_y^+} \left| y^h \xi^\alpha \partial_t^l \partial_y^k \partial_\xi^\beta \hat{F} \right|,$$

$$\lambda'(m,\hat{U}_0,\xi) = \sum_{h \wedge |\alpha|+2|\beta|+k \le m} \sup_{\overline{R}_y^+} \left| y^h \xi^\alpha \partial_y^k \partial_\xi^\beta \hat{U}_0 \right|,$$

$$\lambda_T''(m,\hat{H},\xi) = \sum_{|\alpha|+2l+2|\beta| \le m} \sup_{[0,T]} \left| \xi^\alpha \partial_t^l \partial_\xi^\beta \hat{H} \right| \quad ,$$

*then, for all* $\xi \in \dot{R}_n$

(2.2) $$\lambda_T(0,\hat{U},\xi) \le C\left(\lambda'(0,\hat{U}_0,\xi) + \lambda_T(0,\hat{F},\xi) + \lambda_T''(0,\hat{H},\xi)\right)$$
$$\left[\lambda_T(0,\hat{U}^*,\xi) \le C\left(\lambda_T(0,\hat{F}',\xi) + \lambda_T''(0,\hat{H}',\xi)\right)\right],$$

and

(2.3) $$\lambda_T(m,\hat{U},\xi) \le C\left(\lambda'(m+1,\hat{U}_0,\xi) + \lambda_T(m+1,\hat{F},\xi) + \lambda_T''(m+1,\hat{H},\xi)\right)$$
$$\left[\lambda_T(m,\hat{U}^*,\xi) \le C\left(\lambda_T(m+1,\hat{F}',\xi) + \lambda_T''(m+1,\hat{H}',\xi)\right)\right]$$

*for* $m \in N$, *where C is a positive constant independing of* $\xi$, *but depending of T and m.*

We'll not prove Theorem 2.1 because the procedure is just the same as given in proof of Theorem 1.1. Now we prove the following

**THEOREM** 2.2 - *Let* $\hat{U}$ *be the function of Theorem 2.1 and let* $\hat{U}_0, \hat{F}, \hat{H}$ *belong respectively to* $\mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R_n)$, $C^\infty([0,T], \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R_n))$, $C^\infty([0,T], \mathcal{S}(R_n))$. *Then the function* $\hat{U}$ *can be extended as a function of class* $C^\infty([0,T], \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R_n))$ *and (2.2), (2.3) are true for* $\xi = 0$ *also, thus*

$$U(t,y,x) = \underset{\xi \to x}{\mathcal{F}^{-1}} \hat{U}(t,y,x) = \int_{R_n} e^{ix \cdot \xi} \hat{U}(t,y,\xi)\, d\xi$$

*belongs to* $C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\overline{R}^+_y \times R^n))$ *and it is solution of* $P(U_0,F,H)$.

*Furthermore, if* $\hat{F}', \hat{H}'$ *belong respectively to* $C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\overline{R}^+_y \times R_n))$ *and* $C^\infty([0,T],\mathcal{S}(R_n))$, *the function* $\hat{U}^*$ *of theorem 2.1 can be extended as a function of class* $C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\overline{R}^+_y \times R_n))$ *with (2.2), (2.3) true for* $\xi = 0$ *also. So,* $\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\hat{U}^*(t,y,x)$ *belongs to* $C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\overline{R}^+_y \times R^n))$ *and it is solution of* $P^*(0,F',H')$.

Proof. By Theorem 2.1 it suffices to show that, for all $l,k \in N_0$ and $\beta \in N_0^n$, the function $\partial_t^l \partial_y^k \partial_\xi^\beta \hat{U}(t,y,\xi)$ converges uniformly on $[0,T]\times\overline{R}^+_y$ for $\xi \to 0$. Fixed $\xi',\xi'' \in \dot{R}_n$, we put

$$W(t,y) = \hat{U}(t,y,\xi') - \hat{U}(t,y,\xi'') \qquad (t,y) \in [0,T]\times\overline{R}^+_y .$$

Being

$$\left(\partial_t - \partial_y^2 + \omega^2(\xi')\right)W = \left(\omega^2(\xi'') - \omega^2(\xi')\right)\hat{U}(t,y,\xi'') + \hat{F}(t,y,\xi') - \hat{F}(t,y,\xi''),\ [0,T]\times\overline{R}^+_y$$

$$W(0,y) = \hat{U}_0(y,\xi') - \hat{U}_0(y,\xi''),\ y \in \overline{R}^+_y ; \quad W(t,0) = \hat{H}(y,\xi') - \hat{H}(y,\xi''),\ t \in [0,T] ,$$

applying Theorem 2.1, we have

$$\sup_{[0,T]\times\overline{R}^+_y} |W| \le C\Big[\left|\omega^2(\xi'') - \omega^2(\xi')\right|\left(\lambda_T(0,\hat{F},\xi'') + \lambda'(0,\hat{U}_0,\xi'') + \lambda''_T(0,\hat{H},\xi'')\right)$$
$$+ \sup_{[0,T]\times\overline{R}^+_y} \left|\hat{F}(t,y,\xi') - \hat{F}(t,y,\xi'')\right| + \sup_{\overline{R}^+_y}\left|\hat{U}_0(y,\xi') - \hat{U}_0(y,\xi'')\right| + \sup_{[0,T]}\left|\hat{H}(t,\xi') - \hat{H}(t,\xi'')\right|\Big]$$

with $C$ independent of $\xi',\xi''$. So we have proved the uniformly convergence of $\hat{U}$ for $\xi \to 0$. In similar way and by induction, we can prove the convergence of the derivatives of $\hat{U}$. The extension of the function $\hat{U}^*$ is proved by similar arguments.□

For the following developments, it is necessary to keep in mind that about the problems $P_0(U_0,F)$ and $P_0^*(F')$ one can make the same considerations made at beginning of §2. Furthermore one can enunciate and prove theorems similar to Theorems 2.1 and 2.2.

## §3.Foundamental solutions for auxiliary problems

We consider the following problem *p(g,f,h)*

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \partial_\tau u - \partial_z^2 u + z^2 u = f(\tau,z), \quad (\tau,z) \in R^+_\tau \times R^+_z \\ u(0,z) = g(z),\ z \in R^+_z ; \quad u(\tau,0) = h(\tau),\ \tau \in R^+_\tau \end{cases}$$

where

(3.2) $$f \in C^{\infty}(\overline{R}_{\tau}^{+}, \mathcal{S}(\overline{R}_{z}^{+})), \quad g \in \mathcal{S}(R_{z}^{+}), \quad h \in C^{\infty}(\overline{R}_{\tau}^{+}),$$

(3.3) $$\partial_{\tau}^{l}\partial_{z}^{k} f(0,0) = 0 \ , \quad h^{(l)}(0) = 0, \qquad \forall l,k \in N_0;$$

moreover we consider the problem $p^{*}(\chi,\vartheta)$, also

(3.4) $$\begin{cases} -\partial_{\tau} u^{*} - \partial_{z}^{2} u^{*} + z^{2} u^{*} = \chi(\tau,z), \quad (\tau,z) \in R_{\tau}^{+} \times R_{z}^{+} \\ u^{*}(\tau,0) = \vartheta(\tau), \ \tau \in R_{\tau}^{+}; \quad \lim_{|(\tau,z)| \to +\infty} u^{*}(\tau,z) = 0 \end{cases}$$

where

(3.5) $$\chi \in C_{0}^{\infty}(R_{\tau}^{+}, \mathcal{S}(\overline{R}_{z}^{+})) \ , \quad \vartheta \in C_{0}^{\infty}(R_{\tau}^{+}).$$

In order to construct the unique solution of problems $p(g,f,h)$ and $p^{*}(\chi,\vartheta)$, in $C^{\infty}(\overline{R}_{\tau}^{+}, \mathcal{S}(\overline{R}_{z}^{+}))$, we introduce the Hermite functions $\{\varphi_m\}_{m \in N_0}$. We recall that (see [1],[4])

(3.6) $$\varphi_m \in \mathcal{S}(R_z), \qquad \varphi_m'' - z^2 \varphi_m + (2m+1)\varphi_m = 0$$

(3.7) $$z\varphi_m = \sqrt{m/2}\,\varphi_{m-1} + \sqrt{(m+1)/2}\,\varphi_{m+1} \ , \qquad z\varphi_m' = \sqrt{m/2}\,\varphi_{m-1} - \sqrt{(m+1)/2}\,\varphi_{m+1}$$

(3.8) $$\|\varphi_m\|_{L^2(R_z)}^2 = \sqrt{\pi} \ , \qquad \sup_{\substack{z \in R_z \\ m \in N_0}} |\varphi_m(z)| \le \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{2 \operatorname{sen} \tau}} \right)^{1/2}.$$

If $g \in L^2(R_z^+)$, put

(3.9) $$g_{2k+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(z)\varphi_{2k+1}(z)dz \qquad k \in N_0,$$

we observe that $\{g_{2k+1}\}_{k \in N_0}$ is the sequence of Hermite-Fourier coefficients of odd extension of $g$ for $z<0$, so $\{g_{2k+1}\}_{k \in N_0} \in l^2$. According to (3.9), we put

(3.10) $$\varphi_{2k+1}^{0} = (\varphi_0)_{2k+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2/2} \varphi_{2k+1}(z)dz \qquad k \in N_0.$$

Now we introduce the following operators

(3.11) $$T: \ g \in L^2(R_z^+) \to \sum_{k=0}^{+\infty} g_{2k+1}(z)\varphi_{2k+1}(z)e^{-(4k+3)\tau}$$

(3.12) $$Z: \ f \in C^0(\overline{R}_{\tau}^{+}, L^2(R_z^+)) \to \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_{2k+1}(z) \int_0^{\tau} e^{-(4k+3)(\tau-\tau')} f_{2k+1}(\tau')d\tau'$$

$$Q:\ h\in C^0(\overline{R}_\tau^+)\to\sum_{k=0}^{+\infty}(4k+2)\varphi_{2k+1}^0\varphi_{2k+1}(z)\int_0^\tau e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}h(\tau')d\tau' \tag{3.13}$$

$$Z^*:\ \chi\in C^0(\overline{R}_\tau^+,L^2(R_z^+))\to\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi_{2k+1}(z)\int_\tau^{+\infty}e^{-(4k+3)(\tau'-\tau)}\chi_{2k+1}(\tau')d\tau' \tag{3.14}$$

$$Q^*:\ \vartheta\in C_0^0(\overline{R}_\tau^+)\to\sum_{k=0}^{+\infty}(4k+2)\varphi_{2k+1}^0\varphi_{2k+1}(z)\int_\tau^{+\infty}e^{-(4k+3)(\tau'-\tau)}\vartheta(\tau')d\tau', \tag{3.15}$$

and we prove

**PROPOSITION** 3.1 - *If (3.2) and (3.3) hold, then*

$$u(\tau,z)=Tg(\tau,z)+Zf(\tau,z)+Qh(\tau,z)\in C^\infty(\overline{R}_\tau^+,\mathcal{S}(\overline{R}_z^+)) \tag{3.16}$$

*and* $u(\tau,z)$ *is solution of* $p(g,f,h)$. *Moreover if (3.4) holds, then*

$$u^*(\tau,z)=Z^*\chi(\tau,z)+Q^*\vartheta(\tau,z)\in C^\infty(\overline{R}_\tau^+,\mathcal{S}(\overline{R}_z^+)) \tag{3.17}$$

*and it is solution of* $p^*(\chi,\vartheta)$.

Proof. By (3.2) the odd extension of $g$ belongs to $\mathcal{S}(R_z)$, so that the sequence $\{g_{2k+1}\}_{k\in N_0}$ is rapidly decreasing and (3.16) is proved for the tern $(g,0,0)$. It is easy to see that $Tg$ is solution of $p(g,0,0)$. Applying the Cauchy-Schwartz inequality and Lebesgue dominated convergence theorem, the function $Zf$ belongs to $C^\infty(\overline{R}_\tau^+,L^2(R_z^+))$, and we have

$$\int_0^\tau e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}f_{2k+1}(\tau')d\tau'=\sum_{r=1}^{m}\frac{(-1)^r}{(4k+3)^{r+1}}\left(f_{2k+1}^{(r)}(\tau)-f_{2k+1}^{(r)}(0)e^{-(4k+3)\tau}\right)$$
$$+\frac{(-1)^{m+1}}{(4k+3)^{m+1}}\int_0^\tau e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}f_{2k+1}^{(m+1)}(\tau')d\tau'\quad\forall k,m\in N_0\ ,$$

so that

$$Zf=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\left(w_r(\tau,z)-v_r(\tau,z)\right)+(-1)^{m+1}u_m(\tau,z) \tag{3.18}$$

where

$$w_r(\tau,z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi_{2k+1}(z)}{(4k+3)^{r+1}}f_{2k+1}^{(r)}(\tau) \tag{3.19}$$

$$v_r(\tau,z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi_{2k+1}(z)}{(4k+3)^{r+1}}f_{2k+1}^{(r)}(\tau)e^{-(4k+3)\tau} \tag{3.20}$$

$$u_m(\tau,z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi_{2k+1}(z)}{(4k+3)^{m+1}}\int_0^\tau e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}f_{2k+1}^{(m+1)}(\tau')d\tau'. \tag{3.21}$$

If now (3.2) and (3.3) hold, the sequence $\left\{f_{2k+1}^{(r)}(0)\right\}_{k\in N_0}$ is rapidly decreasing, therefore (3.20) implies

$$v_r(\tau,z)\in C^\infty(\overline{R}_\tau^+,\mathcal{S}(\overline{R}_z^+)) \qquad \forall r\in N_0\ ; \tag{3.22}$$

then utilizing (3.6)-(3.8) one proves that

$$u_m(\tau,z)\in C^m(\overline{R}_\tau^+\times\overline{R}_z^+) \tag{3.23}$$

$$\sup_{\overline{R}_z^+}\left|z^{2h}\partial_\tau^l\partial_z^k u(\tau,z)\right|<+\infty, \qquad h+l+(k/2)\le m, \tag{3.24}$$

uniformly on every compact subset of $\overline{R}_\tau^+$.
By (3.19) for $r=0$, one deduces that the function $w_0(\tau,z)$ belongs to $C^\infty(\overline{R}_\tau^+,H^2(R_z^+))$, and

$$\partial_z^2 w_0 - z^2 w_0 = f; \qquad w_0(\tau,0)=0 \quad \forall\tau\in\overline{R}_\tau^+;$$

moreover $w_0\in C^\infty(\overline{R}_\tau^+,\mathcal{S}(R_z^+))$, (see [2]).
Being then

$$\partial_z^2 w_r - z^2 w_r = w_{r-1}; \qquad w_r(\tau,0)=0 \quad \forall r\in N,$$

by induction one proves that

$$w_r(\tau,z)\in C^\infty(\overline{R}_\tau^+,\mathcal{S}(R_z^+))\,. \tag{3.25}$$

From (3.18), using (3.22)-(3.25), we see that (3.16) holds for the tern *(0,f,0)*, also. To prove that *Zf* is solution of *p(0,f,0)*, it is sufficient to put *m=2* in (3.18).

Finally, if (3.3) and (3.4) hold, we have

$$\int_0^\tau e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}h(\tau')d\tau = O\left(\frac{1}{4k+3}\right)$$

uniformly on compact subsets of $\overline{R}_\tau^+$, and then we can say that $Qh$ belongs to $C^0(\overline{R}_\tau^+,L^2(R_z^+))$. Since for all $\psi\in C_0^\infty(\overline{R}_z^+)$ and $\tau\ge 0$

$$\int_0^{+\infty}\psi(z)Qh(\tau,z)dz= \tag{3.26}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}(4k+3)\varphi_{2k+1}^{0}\psi_{2k+1}(z)\int_0^{\tau}e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}h(\tau')d\tau' - \sum_{k=0}^{+\infty}\varphi_{2k+1}^{0}\psi_{2k+1}(z)\int_0^{\tau}e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}h(\tau')d\tau\right]$$

$$= h(\tau)\int_0^{+\infty}e^{-z^2/2}\psi(z)dz - \int_0^{+\infty}Z\left(e^{-z^2/2}(h(\tau)+h'(\tau)\right)\psi(z)dz$$

we have

(3.27) $$Qh = e^{-z^2/2}h(\tau) - Z\left(e^{-z^2/2}(h(\tau)+h'(\tau)\right)(\tau,z) \qquad a.e.\ on\ R_\tau^+ \times R_z^+,$$

so (3.16) is complitely proved. By (3.26) one proves that $Qh$ solves the problem $p(0,0,h)$. Reasoning in similar way for $Z^*\chi$ and $Q^*\vartheta$, one completes the proof.□

Now we observe that, proceding like in (3.16), one proves the following

**PROPOSITION** 3.2 - *If (3.2), (3.3) and (3.5) hold, then*

(3.28) $$\int_0^{+\infty}Tg(\tau,z)\gamma(z)dz = \int_0^{+\infty}g(z)T\gamma(\tau,z)dz \qquad \forall\tau\in\overline{R}_\tau^+,$$

(3.29) $$\int_0^{+\infty}dz\int_0^{+\infty}Zf(\tau,z)\chi(\tau,z)d\tau = \int_0^{+\infty}dz\int_0^{+\infty}f(\tau,z)Z^*\chi(\tau,z)d\tau$$

(3.30) $$\int_0^{+\infty}Qh(\tau,z)\vartheta(\tau)dz = \int_0^{+\infty}h(\tau)Q^*\vartheta(\tau,z)dz \qquad \forall z\in\overline{R}_z^+.$$

In order to obtain another representation of solutions, we introduce the following kernels

(3.31) $$\Phi(\tau,z,z') = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-(4k+3)\tau}\varphi_{2k+1}(z)\varphi_{2k+1}(z') \quad (\tau,z,z')\in R_\tau^+\times\overline{R}_z^+\times\overline{R}_{z'}^+$$

(3.32) $$\Psi(\tau,z) = \sum_{k=0}^{+\infty}(4k+2)\varphi_{2k+1}^{0}\varphi_{2k+1}(z)e^{-(4k+3)\tau} \quad (\tau,z)\in R_\tau^+\times\overline{R}_z^+$$

and we prove

**PROPOSITION** 3.3 - *If hypotheses of Proposition 3.2 hold, then*

(3.33) $$Tg(\tau,z) = \int_0^{+\infty}\Phi(\tau,z,z')g(z')dz' \qquad (\tau,z)\in R_\tau^+\times\overline{R}_z^+,$$

(3.34) $$Zf(\tau,z) = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{\tau-\varepsilon}d\tau'\int_0^{+\infty}\Phi(\tau-\tau',z,z')f(\tau',z')dz' \qquad (\tau,z)\in R_\tau^+\times\overline{R}_z^+,$$

(3.35) $$Qh(\tau,z)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\tau-\varepsilon}\Psi(\tau-\tau',z)h(\tau')d\tau' \qquad in\ \mathscr{D}'(R_z^+),\quad \forall\tau>0,$$

(3.36) $$Z^*\chi(\tau,z)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\tau+\varepsilon}^{+\infty}d\tau'\int_0^{+\infty}\Phi(\tau'-\tau,z,z')\chi(\tau',z')dz' \qquad (\tau,z)\in R_\tau^+\times\overline{R}_z^+,$$

(3.37) $$Q^*\vartheta(\tau,z)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\tau+\varepsilon}^{+\infty}\Psi(\tau'-\tau,z)\vartheta(\tau')d\tau' \qquad in\ \mathscr{D}'(R_z^+),\quad \forall\tau>0.$$

Proof. The proof of (3.33) is immediate; we prove (3.34). We observe that fixed $\tau>0$, $\tau'\in[0,\tau[$, $z\geq 0$, we have

(3.38) $$\int_0^{+\infty}\Phi(\tau-\tau',z,z')f(\tau',z')dz'=\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi_{2k+1}(z)f_{2k+1}(\tau')e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}.$$

For every $\varepsilon\in]0,\tau[$, the series on the right-hand side of equality (3.38), converges totally with respect to $\tau'\in[0,\tau-\varepsilon]$, so that we have

(3.39) $$\int_0^{\tau-\varepsilon}d\tau'\int_0^{+\infty}\Phi(\tau-\tau',z,z')f(\tau',z')dz'=\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi_{2k+1}(z)\int_0^{\tau-\varepsilon}e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}f_{2k+1}(\tau')d\tau'.$$

By (3.2) we obtain

(3.40)
$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{\tau-\varepsilon}e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}f_{2k+1}(\tau')d\tau'\right|\\&=\left|f_{2k+1}(0)\frac{e^{-(4k+3)\varepsilon}-e^{-(4k+3)\tau}}{4k+3}+\int_0^{\tau-\varepsilon}f'_{2k+1}(s)ds\int_s^{\tau-\varepsilon}e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}d\tau'\right|\\&\leq\frac{2}{4k+3}|f_{2k+1}(0)|+\int_0^{\tau}\left[\frac{1}{(4k+3)^2}+|f'_{2k+1}(s)|^2\right]ds,\end{aligned}$$

hence the series on the right-hand side of equality (3.39) converges totally with respect to $\varepsilon\in]0,\tau[$, by the rapidly decreasing of $\{f_{2k+1}(0)\}_{n\in N}$ and by equality

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\tau}|f'_{2k+1}(s)|^2ds=\int_0^{\tau}\|\partial_s f(\cdot,s)\|^2_{L^2(R^+)}ds,$$

due to the Lebesgue dominated convergence. So, after letting $\varepsilon\to 0^+$ in (3.39) and by (3.12), (3.5) is proved. Now we prove (3.35) showing that

$$(3.41)\qquad \int_0^{+\infty}\gamma(z)Qh(\tau,z)dz=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty}\gamma(z)dz\int_0^{\tau-\varepsilon}\Psi(\tau-\tau',z)h(\tau')d\tau' \qquad \forall\gamma\in C_0^\infty(R_z^+).$$

Since, $\forall\,\tau>0\ Qh\in L^2(R_z)$, by Parseval equality and by rapidly decreasing of $\{\gamma_{2k+1}\}_{k\in N_0}$

$$\int_0^{+\infty}\gamma(z)Qh(\tau,z)dz=\int_0^{\tau}\sum_{k=0}^{+\infty}(4k+2)\varphi_{2k+1}^0\gamma_{2k+1}e^{-(4k+3)(\tau-\tau')}h(\tau')d\tau'$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\tau-\varepsilon}d\tau'\int_0^{+\infty}\Psi(\tau-\tau')\gamma(z)h(\tau')dz,$$

(3.41) follows. By similar reasoning one can prove (3.36) and (3.37). The Proposition is proved.□

Now we introduce the kernel

$$(3.42)\qquad \Phi_0(\tau,z,z')=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-(2k+1)\tau}\varphi_k(z)\varphi_k(z') \quad (\tau,z,z')\in R_\tau^+\times R_z\times R_{z'}$$

and the operators

$$T_0:\ g\in L^2(R_z^+)\to\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\tau,z,z')g(z')dz'$$
$$Z_0:\ f\in C^0(\overline{R}_\tau^+,L^2(R_z^+))\to\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\tau-\varepsilon}d\tau'\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\tau-\tau',z,z')f(\tau',z')dz'$$
$$Z_0^*:\ \chi\in C^0(R_\tau^+,L^2(R_z^+))\to\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\tau+\varepsilon}^{+\infty}d\tau'\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\tau'-\tau,z,z')\chi(\tau',z')dz',$$

and we observe that using the preceding methods one proves

**PROPOSITION** 3.4 - *If* $g\in\mathcal{S}(R_z)$, $f\in C^\infty(\overline{R}_\tau^+,\mathcal{S}(R_z))$, $\chi\in C_0^\infty(R_\tau^+,\mathcal{S}(R_z))$, *then the functions* $T_0g$, $Z_0f$, $Z_0^*\chi$ *belongs to* $C^\infty(\overline{R}_\tau^+,\mathcal{S}(R_z))$. *Moreover the function* $u=T_0g+Z_0f$ *is solution of problem* $p_o(g,f)$:

$$(3.43)\qquad \begin{cases}\partial_\tau u-\partial_z^2u-z^2u=f(\tau,z), & (\tau,z)\in R_\tau^+\times R_z\\ u(0,z)=g(z),\ z\in R_z\end{cases}$$

*and the function* $u^*=Z_0^*\chi$ *is solution of problem* $p_0^*(\chi)$:

$$\text{(3.44)} \qquad \begin{cases} -\partial_\tau u^* - \partial_z^2 u^* - z^2 u^* = \chi(\tau,z), & (\tau,z) \in R_\tau^+ \times R_z \\ \lim\limits_{|(\tau,z)|\to+\infty} u^*(\tau,z) = 0 \end{cases}$$

*Moreover the following equalities hold*

$$\text{(3.45)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} T_0 g(\tau,z)\gamma(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, T_0\gamma(\tau,z)dz \qquad \forall \gamma \in L^2(R_z)$$

$$\text{(3.46)} \qquad \int_0^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} Z_0 f(\tau,z)\,\chi(\tau,z)dz = \int_0^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,z)\, Z_0^* \chi(\tau,z)dz$$

Now we consider $g \in C_0^\infty(R_z^+)$ and $f, \chi \in C_0^\infty(R_\tau^+ \times R_z^+)$, and we denote by $g_d, f_d, \chi_d$ the odd extensions for $z<0$ for all $\tau \geq 0$. Evidently $g_d, f_d, \chi_d$ verify hypothesis of Proposition 3.4, and it is easy to prove that on $\overline{R}_\tau^+ \times \overline{R}_z^+$ we have

$$\text{(3.47)} \qquad Tg(\tau,z) = T_0 g_d(\tau,z), \qquad Zf(\tau,z) = Z_0 f_d(\tau,z), \qquad Z^*\chi(\tau,z) = Z_0^* \chi_d(\tau,z).$$

## §4. The proof of Theorem I

Fixed $\xi \in \dot{R}_n$, by sostitutions

$$\text{(4.1)} \qquad \tau = t\omega(\xi) \qquad z = y\omega^{1/2}(\xi),$$

the problem $\hat{P}(U_0,0,0)$, $U_0 \in \mathcal{S}(R_y^+ \times R^n)$, changes into the problem $p(g,0,0)$ that we have studied in §3, where

$$\text{(4.2)} \qquad g = g(z,\xi) = \hat{U}_0\left(z\omega^{-1/2}(\xi),\xi\right) \qquad z \in \overline{R}_z^+.$$

Put

$$\text{(4.3)} \qquad u_1(\tau,z;\xi) = Tg\big((\cdot,\xi)\big)(\tau,z) \qquad (\tau,z) \in \overline{R}_\tau^+ \times \overline{R}_z^+,$$

we consider the function

$$\text{(4.4)} \qquad \hat{U}_1(t,y,\xi) = u_1\left(t\omega(\xi), y\omega^{1/2}(\xi);\xi\right) \qquad (t,y,\xi) \in \overline{R}_t^+ \times \overline{R}_y^+ \times \dot{R}_n.$$

From Proposition 3.1 it follows that $\hat{U}_1 \in C^\infty(\overline{R}_t^+ \times \overline{R}_y^+ \times \dot{R}_n)$, moreover $\hat{U}_1 \in C^\infty(\overline{R}_\tau^+, \mathcal{S}(\overline{R}_y^+))$, for $\xi \neq 0$. Clearly $\hat{U}_1$ is solution of $\hat{P}(U_0,0,0)$. By Theorem 2.2

$$U_1(t,y,x)=\underset{\xi\to x}{\mathcal{F}^{-1}}\left(\hat{U}_1(t,y,\xi)\right)\in C^\infty(\overline{R}_t^+,\mathcal{S}(\overline{R}_y^+\times R^n))$$

and it is solution of $P(U_0,0,0)$.

Now if we put

$$k(t,y,y',\xi)=\omega^{1/2}(\xi)\,\Phi\left(t\omega(\xi),y\omega^{1/2}(\xi),y'\omega^{1/2}(\xi)\right), \tag{4.5}$$

from (3.33), (4.3) and (4.4) we obtain

$$U_1(t,y,x)=\int_{R_n}e^{ix\cdot\xi}d\xi\int_0^{+\infty}k(t,y,y',\xi)\hat{U}_0(y',\xi)dy'. \tag{4.6}$$

For (3.31) and (4.5), there is a positive costant $C$ such that

$$|k(t,y,y',\xi)|\le C\omega^{-1/2}(\xi)t^{-1}\qquad\forall(t,y)\in R_t^+\times\overline{R}_{y'}^+, \tag{4.7}$$

thus by Fubini-Tonelli Theorem we have

$$U_1(t,y,x)=\int_0^{+\infty}dy'\int_{R_n}e^{ix\cdot\xi}k(t,y,y',\xi)\hat{U}_0(y',\xi)\,d\xi,\qquad t>0, \tag{4.8}$$

that is $U_1=KU_0$, $K$ being the operator in Theorem I.

From Theorem 1.1 we have that $K$ is linear and continuous from $\mathcal{S}(R_y^+\times R^n)$ to $C^\infty(\overline{R}_t^+,\mathcal{S}(\overline{R}_y^+\times R^n))$.

Now let $\gamma(y,x)\in C^\infty(R_y^+\times R^n)$ be. From (3.38), (4.3) and (4.4), we obtain

$$\int_0^{+\infty}\hat{KU}_0(t,y,\xi)\hat{\gamma}(y,\xi)dy=\int_0^{+\infty}\hat{U}_0(y,\xi)\hat{K\gamma}(t,y,\xi)dy,$$

integrating over $R_n$ and applying the Parseval equality we have

$$\int_0^{+\infty}dy\int_{R^n}KU_0(t,y,x)\gamma(y,x)dx=\int_0^{+\infty}dy\int_{R^n}U_0(t,y,x)K\gamma(y,x)dx.$$

So it is natural to extend the operator $K$ as follows

$$K:\,U_0\in\mathcal{E}'(R_y^+\times R^n)\to C^\infty(\overline{R}_t^+,\mathcal{D}'(R_y^+\times R^n)), \tag{4.9}$$

where $\forall \gamma \in C_0^\infty(R_y^+ \times R^n)$

$$\langle KU_0(t,y,x),\gamma(y,x)\rangle = \langle U_0(t,y,x),K\gamma(y,x)\rangle \qquad \forall t \geq 0. \tag{4.10}$$

From Theorem 1.1 applied to $P(\gamma,0,0)$, we have that (4.10) defines a function belonging to $C^\infty(\overline{R}_t^+,\mathscr{D}'(R_y^+ \times R^n))$; moreover the same theorem assures that the operator $K$ in (4.9) defined by (4.10) is continuous, so $LKU_0(t,y,x) = 0$ in $C^\infty(\overline{R}_t^+,\mathscr{D}'(R_y^+ \times R^n))$.

From (4.9) and (4.10) we have then

$$KU_0(0,y,x) = U_0(y,x) \qquad on \quad \mathscr{D}'(R_y^+ \times R^n).$$

Put

$$k_0(t,y,y',\xi) = \omega_0^{1/2}(\xi)\,\Phi_0\left(t\omega_0(\xi), y\omega_0^{1/2}(\xi), y'\omega_0^{1/2}(\xi)\right), \tag{4.11}$$

$$K_0 : U_0 \in \mathcal{S}(R_y \times R^n) \to \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{R_n} e^{ix\cdot\xi} k_0(t,y,y',\xi)\hat{U}_0(y',\xi)\,d\xi,$$

the Proposition 3.4, Theorems 2.1 and 2.2 pertinent to problem $\hat{P}_0(U_0,0)$, let alone the Theorem 1.8 imply that $K_0$ is linear and continuous from $\mathcal{S}(R_y \times R^n)$ to $C^\infty(\overline{R}_t^+,\mathcal{S}(R_y \times R^n))$ which extends as a continuous linear operator from $\mathscr{E}'(R_y \times R^n)$ to $C^\infty(\overline{R}_t^+,\mathscr{D}'(R_y \times R^n))$, such that $K_0U_0$ is a generalized solution of $P_0(U_0,0)$.

From the first of (3.47) it follows that fixed $U_0 \in \mathscr{E}'(R_y^+ \times R^n)$ and denoted by $(U_0)_d$ the odd extension of $U_0$ for $y<0$, $KU_0$ coincides with the restriction of $K_0(U_0)_d$ to $R_y^+ \times R^n$. Because $L$ is a hypoelliptic operator (see [3]) we have $K_0(U_0)_d \in C^\infty(R_t^+ \times R_y \times R^n)$, moreover being $K_0(U_0)_d$ an odd distribution with respect to $y$ it results $K_0(U_0)_d(t,0,x) = 0$ on $R_t^+ \times R^n$. So we can say that $KU_0 \in C^\infty(R_t^+ \times \overline{R}_y^+ \times R^n)$ and $KU_0(t,0,x) = 0$ for $t>0$.

The Theorem I is completely proved.□

## §5. The proof of Theorem II

We suppose that $F(t,y,x)$ belongs to $C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n))$ and it vanishes in a neighborhood of manifold $t=0$, $y=0$. Fixed $\xi \neq 0$, using (4.1), we put

$$f(\tau,z;\xi) = \omega^{-1}(\xi)\hat{F}\left(\tau\omega^{-1}(\xi), z\omega^{-1/2}(\xi);\xi\right) \qquad (\tau,z) \in [0,T\omega(\xi)] \times \overline{R}_z^+ \tag{5.1}$$

and we observe that this function verifies (3.2) and (3.4), $\forall \xi \neq 0$. After we consider

(5.2) $$u_2(\tau,z;\xi) = Tg\big(\cdot,\xi\big)\big)(\tau,z) \qquad (\tau,z)\in[0,T\omega(\xi)]\times\overline{R}_z^+$$

and we set

$$\hat{U}_2(t,y,\xi) = u_2\big(t\omega(\xi), y\omega^{1/2}(\xi);\xi\big) \qquad (t,y,\xi)\in[0,T]\times\overline{R}_y^+\times\dot{R}_n;$$

arguing as in §4 we can prove that the function

(5.3) $$U_2(t,y,x) = \underset{\xi\to x}{\mathscr{F}^{-1}}\big(\hat{U}_2(t,y,\xi)\big)\in C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\overline{R}_y^+\times R^n))$$

and it is solution of problem *P(0,F,0)*.

In order to obtain the integral rapresentation of $U_2$ (see Theorem II), we put

(5.4) $$\hat{U}_2(t,y,\xi;\varepsilon) = \int_0^{t-\varepsilon} dt' \int_0^{+\infty} k(t-t',y,y',\xi)\hat{F}(t',y',\xi)\,dy'$$

where $(t,y,\xi)\in[0,T]\times\overline{R}_y^+\times\dot{R}_n$ and $\varepsilon\in]0,t]$. From (3.34) we get

(5.5) $$\hat{U}_2(t,y,\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\hat{U}_2(t,y,\xi;\varepsilon).$$

The following Proposition holds

**Proposition** 5.1 - *The function* $\big|\hat{U}_2(t,y,\xi;\varepsilon)\big|$, $\forall(t,y)\in[0,T]\times\overline{R}_y^+$ *and* $\forall\varepsilon\in]0,t]$, *is majorized by a function belongs to* $L^1(R_n)$.

Proof. From (5.4) and (4.5), by (4.1) and (3.39)

$$\hat{U}_2(t,y,\xi;\varepsilon) = u_2\big(t\omega(\xi), y\omega^{1/2}(\xi),\xi;\varepsilon\big)$$

where

$$u_2(\tau,z;\xi;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty}\varphi_{2k+1}(z)\int_0^{\tau-\varepsilon\omega} e^{-(4k+3)(\tau-\tau')} f_{2k+1}(\tau')\,d\tau'.$$

Reasoning as in (3.40) we have

$$\big|u_2(\tau,z;\xi;\varepsilon)\big| \le M\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\big|f_{2k+1}(0)\big|}{4k+3} + \frac{1}{4k+3}\int_0^{\tau-\varepsilon\omega}\big|f'_{2k+1}(\tau')\big|\,d\tau'\right)$$

where the constant $M$ is independent of $\varepsilon$ and $\xi$. Being

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\big|f_{2k+1}(0)\big|^2 = 2\omega^{-3/2}(\xi)\big\|\hat{F}(0,y,\xi)\big\|^2_{L^2(R_y^+)},$$

$$\int_0^{\tau} \left\| \partial_{\tau'} f(\tau', z) \right\|^2_{L^2(R_y^+)} d\tau' \Big|_{\tau = t\omega} = 2\omega^{-5/2}(\xi) \int_0^t \left\| \partial_{t'} \hat{F}(t', y, \xi) \right\|^2_{L^2(R_y^+)} dt'$$

we have by Young's inequality

(5.6)
$$\left| u_2\left(t\omega(\xi), y\omega^{1/2}(\xi), \xi; \varepsilon\right) \right|$$

$$\leq \frac{\omega^{-3/4}(\xi)}{(1+|\xi|)^{2p}} \left( (1+|\xi|)^{4F} \left\| \hat{F}(0, y, \xi) \right\|^2_{L^2(R_y^+)} + c(1+t) + (1+|\xi|)^{4p} \int_0^t \left\| \partial_{t'} \hat{F}(t', y, \xi) \right\|^2_{L^2(R_y^+)} dt' \right),$$

with $p > n/2$ and $c$ independent of $\xi$, $\varepsilon$ and $p$.
Since $\hat{F}(t, y, \xi) \in C^\infty([0, T], \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R_n))$ and $\omega(\xi) = O(|\xi|)$, the statement follows from (5.6).□

From the last proposition and by the Lebesgue dominated convergence Theorem as well as by (5.4) and (4.7) it follows

$$U_2(t, y, x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{t-\varepsilon} dt' \int_0^{+\infty} dy' \int_{R_n} e^{ix\cdot\xi} k(t - t', y, y'; \xi) \hat{F}(t', y', \xi) d\xi,$$

that is $U_2 = MF$, where $M$ is the operator introduced in Theorem II.

From Theorem 1.1 it follows that $M$ is a continuous linear map of $C^\infty([0, T], \mathcal{S}(\overline{R}_y^+ \times R^n))$ into itself. The same result holds for the operator

$$M^* : F'(t, y, x) \in C_0^\infty(]0, T[ \times R_y^+ \times R^n) \to \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{t+\varepsilon}^{T} dt' \int_0^{+\infty} dy' \int_{R_n} e^{ix\cdot\xi} k(t' - t, y, y'; \xi) \hat{F}'(t', y', \xi) d\xi$$
$$= M\left(F'(T - t, y, x)\right)(T - t, y, x),$$

and for the operator $M_0$ that we define likewise $M$ with $k$ replaced by $k_0$ (see (4.11)).
From (3.29)

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} dy \int_{R^n} MF(t, y, x) F'(t, y, x) dx = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} dy \int_{R^n} F(t, y, x) M^* F'(t, y, x) dx$$

hence $M$ can be extended in such way

$$M : F \in \mathcal{S}'(]0, T[ \times R_y^+ \times R^n) \to MF \in \mathcal{D}'(]0, T[ \times R_y^+ \times R^n)$$

where

(5.7) $$\langle MF, F' \rangle = \langle F, M^* F' \rangle \qquad \forall F' \in C_0^\infty(]0,T[\times R_y^+ \times R^n).$$

Because $M^*F'$ is solution of $P^*(0,F',0)$, by Theorem 1.1 it follows that $MF$ is a distribution such that $L(MF)=F$ and that $M$ is a continuous linear operator.

From Theorem 1.8 it follows that we can say the same thing for $M_0$; moreover it is easy to prove

$$MF = M_0(F_d) \qquad \forall F \in \mathcal{E}'(]0,T[\times R_y^+ \times R^n),$$

where $F_d$ is the odd extension of $F$ with respect to $y$.
Because $LM_0(F_d) = F_d$ and $F_d$ vanishes in a neighborhood $J$ of manifold $t>0$, $y=0$ then $MF_d$ vanishes for $y=0$ being an odd distribution. So we can say that $MF$ satisfies the first boundary condition for the problem $P(0,F,0)$.
Put $\bar{t} = \min_{\text{supp}F} t$, from (5.7) it follows that $MF$ vanishes in $]0,\bar{t}[\times R_y^+ \times R^n$. Now we are able to say that $MF$ satisfies the second boundary condition of $P(0,F,0)$, also.
The Theorem II is completely proved.□

## §6. The proof of Theorem III

We suppose that $H(t,x)$ belongs to $C_0^\infty(]0,T],\mathcal{S}(R^n))$. Fixed $\xi\neq 0$, using (4.1) we put

(6.1) $$h(t,\xi) = \hat{H}(\tau\omega^{-1},\xi)$$

(6.2) $$u_3(\tau,z,\xi) = Q\big(h(\cdot,\xi)\big)(\tau,z)$$

(6.3) $$\hat{U}_3(t,y,\xi) = u_3(t\omega, y\omega^{1/2};\xi) \qquad (t,y,\xi) \in [0,T]\times \bar{R}_y^+ \times \dot{R}_n$$

(6.4) $$U_3(t,y,x) = \underset{\xi\to x}{\mathcal{F}^{-1}}\big(\hat{U}_3(t,y,\xi)\big).$$

As well in this case, arguing as in §4 we can prove that the function $U_3(t,y,x)$ belongs to $C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\bar{R}_y^+ \times R^n))$ and it is solution of problem $P(0,0,H)$.

Now we set

(6.5) $$u_3(\tau,z;\xi,\varepsilon) = \int_0^{\tau-\varepsilon\omega} \psi(\tau-\tau',z)\,h(\tau',\xi)\,d\tau', \quad \tau>0,\ z\geq 0,\ \xi\in\dot{R}_n,\ \varepsilon\in]0,\tau\omega^{-1}]$$

where $\psi(\tau,z)$ is the function defined by (3.32), and we introduce the following functions

(6.6) $$\hat{U}_3(t,y,\xi;\varepsilon) = u_3(t\omega, y\omega^{1/2};\xi,\varepsilon) \qquad \varepsilon\in]0,t]$$

(6.7) $$n(t,y,\xi)=\omega\psi(t\omega,y\omega^{1/2}).$$

We prove

**Proposition** 6.1 - *For* $(t,y)\in]0,T]\times\overline{R}_y^+$ *and* $\varepsilon\in]0,t]$ *it results*

(6.8) $$\hat{U}_3(t,y,\xi;\varepsilon)=\underset{x\to\xi}{\mathscr{F}}\left(\int_0^{t-\varepsilon}dt'\int_{R_n}e^{ix\cdot\xi}n(t-t',y,\xi)\hat{H}(t',\xi)d\xi\right),$$

*moreover for all* $t\in]0,T[$, $\xi\in\dot{R}_n$, $\varepsilon\in]0,t]$

(6.9) $$\left\|\hat{U}_3(t,y,\xi;\varepsilon)\right\|_{L^2(R_y^+)}\le\omega^{-1/4}\max_{[0,t]}\left|\hat{H}(t',\xi)\right|.$$

Proof. By (6.5)-(6.7)

(6.10) $$\underset{\xi\to x}{\mathscr{F}^{-1}}\left(\hat{U}_3(t,y,\xi;\varepsilon)\right)=\int_{R_n}e^{ix\cdot\xi}d\xi\int_0^{t-\varepsilon}n(t-t',y,\xi)\hat{H}(t',\xi)dt';$$

to have (6.8) it is sufficies to prove that on the right-hand side of (6.10) it is possible to interchange the order of integration. Thus we observe that

$$\int_0^{t-\varepsilon}\left|n(t-t',y,\xi)\right|\left|\hat{H}(t',\xi)\right|dt'\le\max_{[0,t]}\left|\hat{H}(t',\xi)\right|\sum_{k=0}^{+\infty}(4k+3)\left|\varphi_{2k+1}^0\right|\int_0^{t-\varepsilon}e^{-(4k+3)(t-t')\omega}\omega\,dt'$$

$$\le\max_{[0,t]}\left|\hat{H}(t',\xi)\right|\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\omega^{-1/2}\left|\varphi_{2k+1}^0\right|^2+\omega^{1/2}e^{-k\varepsilon\omega}\right)\le C\omega^{-1/2}\max_{[0,t]}\left|\hat{H}(t',\xi)\right|$$

with $C$ independent of $\xi$. Since $\left|\hat{H}(t',\xi)\right|$ is rapidly decreasing with respect to $\xi$, uniformely with respect to $t'\in[0,T]$, from Fubini's Theorem, (6.8) follows.
Now, observed that

$$\left\|\hat{U}_3(t,y,\xi;\varepsilon)\right\|^2_{L^2(R_y^+)}=\int_{R_z^+}\left|u_3(t\omega,z;\xi,\varepsilon)\right|^2\omega^{-1/2}dz$$

$$\le\omega^{-1/2}\sum_{k=0}^{+\infty}(4k+2)^2\left|\varphi_{2k+1}^0\right|^2\left|\int_0^{t\omega}e^{-(4k+3)(t\omega-\tau')}h(\tau',\xi)d\tau'\right|^2\le\omega^{-1/2}\max_{[0,t]}\left|\hat{H}(t',\xi)\right|^2\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\varphi_{2k+1}^0\right|^2,$$

the inequality (6.9) follows from (3.10).□

The following Theorem holds

**Theorem** 6.1 - *For all $t>0$, the function $U_3(t,y,x)$ admits the following representation*

$$(6.11)\qquad U_3(t,y,x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{t-\varepsilon}dt'\int_{R_n}e^{ix\cdot\xi}n(t-t',y,\xi)\hat{H}(t',\xi)d\xi \qquad in\ \mathcal{D}'(R_y^+\times R^n).$$

Proof. The equality (6.11) is proved if

$$(6.12)\qquad \int_{R_y^+\times R^n}G(y,x)U_3(t,y,x)dydx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{R_y^+\times R^n}G(y,x)dydx\int_0^{t-\varepsilon}dt'\int_{R_n}e^{ix\cdot\xi}n(t-t',y,\xi)\hat{H}(t',\xi)d\xi$$

for all $G(y,x)\in C_0^\infty(R_y^+\times R^n)$ and for all $t>0$.
From (6.8),(6.9) and by Parseval's formula, the (6.12) is equvalent to

$$(6.13)\qquad \int_{R_y^+\times R_n}\hat{G}(y,\xi)\hat{U}_3(t,y,\xi)dyd\xi=\int_{R_n}d\xi\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{R_y^+}\hat{G}(y,\xi)\hat{U}_3(t,y,\xi;\varepsilon)dy.$$

Now fixed $\xi\in\dot{R}_n$ and put $g(z,\xi)=[\hat{G}(y,\xi)]_{y=z\omega^{-1/2}}$, from (6.5) and (3.41) we have

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{R_y^+}\hat{G}(y,\xi)\hat{U}_3(t,y,\xi,\varepsilon)dy=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\omega^{-1/2}\int_{R_z}g(z,\xi)u_3(t\omega,z;\xi,\varepsilon)dz$$

$$=\omega^{1/2}\int_{R_z^+}g(z,\xi)dz\int_0^{t\omega}\psi(t\omega-\tau',z)h(\tau',\xi)d\tau'.$$

Then the statement follows from (6.1), (6.7).□

By Theorem 6.1 we have that $U_3=NH$, where $N$ is the operator introduced inTheorem III. Theorem 1.1 implies that $N$ is a continuous linear map of $C_0^\infty(]0,T[,\mathcal{S}(R^n))$ into $C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\overline{R}_y^+\times R^n))$.

Now we define the operator $N^*$ as follows

$$N^*:\ H'(t,x)\in C_0^\infty(]0,T[,\mathcal{S}(R^n))\to N^*H'(t,y,x)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t+\varepsilon}^{T}dt'\int_{R_n}e^{ix\cdot\xi}n(t'-t,y,\xi)\hat{H}'(t',\xi)d\xi=N\big(H'(T-t,x)\big)(T-t,y,x).$$

It is plain that if $H'(t,x)\in C_0^\infty(]0,T[,\mathcal{S}(R^n))$, then $N^*H'\in C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\overline{R}_y^+\times R^n))$ and it is solution of the problem $P^*(0,0,H')$. From Proposition 3.2 , being

$$N^*H'\big(\tau\omega^{-1},z\omega^{-1/2},\xi\big)=Q^*\big(\hat{H}'(\tau\omega^{-1},\xi)\big)(\tau,z),$$

one deduced that

$$\int_0^{+\infty}\int_{R^n} NH(t,y,x)H'(t,x)\,dtdx = \int_0^{+\infty}\int_{R^n} H(t,x)N^*H'(t,y,x)\,dtdx$$

for all $H$, $H' \in C_0^\infty(]0,T[,\mathcal{S}(R^n))$ and $y \geq 0$. So we can extend the operator $N$ as follows: if $H(t,x) \in \mathcal{E}'(]0,T[\times R^n)$, $NH$ is the distribution on $]0,T[\times R^n$, depending on parameter $y$, such that

$$\langle NH(t,y,x), H'(t,x)\rangle = \langle H(t,x), N^*H'(t,y,x)\rangle \qquad \forall H' \in C_0^\infty(]0,T[\times R^n). \tag{6.15}$$

The Theorem 1.1 assures that $NH \in C^\infty(\overline{R}_y^+, \mathcal{D}'(]0,T[\times R^n))$ and that the extension of $N$ is a continuous linear map of $\mathcal{E}'(]0,T[\times R^n)$ into $C^\infty(\overline{R}_y^+, \mathcal{D}'(]0,T[\times R^n))$. From (6.14) and (6.15) we have that $NH$ vanishes in $]0,\bar{t}[\times R^n$, where $\bar{t} = \min_{\text{supp } H} t$, and that $NH(t,0,x)=H(t,x)$. From continuity of $N$ follows that $L(NH)=0$ in $C^\infty(\overline{R}_y^+, \mathcal{D}'(]0,T[\times R^n))$, moreover we can say that $NH$ is a generalized solution of $P(0,0,H)$, for all $H \in \mathcal{E}'(]0,T[\times R^n)$. The Theorem III is so completely proved.□

## REFERENCES


[1] Avantaggiati A. - *Sviluppi in serie di Hermite-Fourier e condizione di analiticità e quasi analiticità*, Methods of Functional Analysis and Theory of Equations, Proc. of the Inter. Meeting, p. 282-331 (1982).

[2] Benevento M.L., Bruno T., Montagnaro G. - *Sul problema di Dirichlet per una classe di operatori differenziali lineari del secondo ordine a caratteristiche doppie*, II Preprint n.12, Dip. di Mat. e Appl., Univ. di Napoli "Federico II", (1993).

[3] Boutet de Monvel L. - *Hypoelliptic Operators with double characteristics and the related Pseudodifferential Operators*, Comm. Pure Appl. Math. 27, p.585-639 (1974).

[4] Cimmino G.- *On Temperated Ultradistributions as boundary traces*, Methods of Functional Analysis and Theory of Equations, Proc. of the Inter. Meeting, p.80-102 (1982).

[5] D'Auria N. - *Poisson Operator for a Degenerate Parabolic Problem*, Rend. Acc. delle Scienze Fis. e Mat., Soc. Naz. di Scienze Lettere e Arti in Napoli, Serie IV, vol.LXIII, p.17-25 (1996).

[6] D'Auria N., Fiodo O. - *Su un problema parabolico degenere*, Rend. Acc. delle Scienze Fis. e Mat., Soc. Naz. di Scienze Lettere e Arti in Napoli, Serie IV, vol.LIX, p.19-32 (1992).

[7] Iwasaki C. - *The Asymptotic expansion of the foundamental solution for Parabolic initial-boundary value problems and its applications*, Osaka J. Math. 31, p.663-728, (1994).
[8] Ladyzenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. - *Linear and Quasi Linear Equations of Parabolic type*, Amer. Math. Soc. (1968).
[9] Schwartz L. - *Théorie des distributions*, Hermann (1966).
[10] Treves F. - *Locally Convex Spaces and Linear Partial Differential Equations*, Springer New York (1967).
[11] Tsutsumi C. - *The foundamental solution for a parabolic Pseudodifferential Operators and Parametrices for Degenerate Operators*, Proc. Japon Acad. 51, p.103-108 (1975).

Nunzia A. D'Auria - Dip. di Mat. e Appl. "R. Caccioppoli", Università di Napoli "Federico II", via Claudio,21 - cap. 80125

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXV, (1997) pp. 93-257

# LE COLLEZIONI DI STRUMENTI E MODELLI MATEMATICI DEL DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI "R.CACCIOPPOLI" DELL'UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II": CATALOGHI RAGIONATI

Nota di L.Carbone* - G.Cardone** - F.Palladino***

Presentata dal socio Luciano Carbone
(Adunanza del 7/11/1998)

**Riassunto** - Nella presente nota diamo i cataloghi relativi alle collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II".

**Abstract** - In this work we give catalogues of mathematical Instruments and Models Collection of Department of Mathematics and Applications "R. Caccioppoli" of the University of Naples "Federico II".

* Università degli Studi di Napoli "Federico II" - Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli", Complesso Monte S.Angelo, Edificio T, Via Cintia, 80126 Napoli.

** Seconda Università degli Studi di Napoli - Dipartimento di Ingegneria Civile - Real Casa dell'Annunziata - via Roma, 29, 81031 Aversa (CE).

*** Università degli Studi di Salerno - Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata - via Salvador Allende, 84081 Baronissi (SA).

## 1. INTRODUZIONE

In una nota precedente ([Carbone Cardone Palladino 1996]) sono state descritte la storia e la consistenza delle collezioni di strumenti e modelli matematici risalenti al periodo compreso tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento conservatisi presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università di Napoli "Federico II".

Nella presente nota vengono dati i cataloghi relativi a tali collezioni. Si tratta essenzialmente di:

a) un catalogo generale, legato anche, come d'uso per tali materiali d'epoca, a fini espositivi;

b) un catalogo per costruttori;

c) un catalogo tematico, diviso in due parti: nella prima vengono assegnati ad ogni tema gli oggetti pertinenti; nella seconda ad ogni oggetto vengono legati i temi pertinenti;

d) un catalogo per committenti; in esso i modelli (o almeno quelli per i quali ciò è possibile) vengono raggruppati a seconda del committente (per acquisto o fabbricazione) napoletano;

e) un catalogo iconografico; in esso vengono date le rappresentazioni fotografiche in bianco e nero dei modelli della collezione.

Notizie più dettagliate relative ai criteri seguiti nelle specifiche catalogazioni sono premesse ad ogni singolo catalogo; va precisato, però, che in generale, dato il netto prevalere dei modelli delle collezioni Schilling e Brill, questi ultimi assorbiti nel 1899 nelle collezioni Schilling (circa 80 modelli su circa 120) si è utilizzato in maniera decisiva il Catalogo di Schilling nella sua edizione più matura, quella del 1911 ([Schilling 1911]), ricca di circa quattrocento modelli e strumenti.

Ci si è astenuti in generale dal dare per ogni singolo modello riferimento alla talora vasta bibliografia d'epoca connessa, della quale lo stesso [Schilling 1911] dà una larga esemplificazione, e una dettagliata descrizione del suo significato

matematico, anch'esso per lo più largamente trattato, per molti di essi, in [Schilling 1911] per quanto concerne le conoscenze a inizio secolo e in [Fischer 1986] per quanto concerne le conoscenze attuali.

Non viene inoltre neanche data nessuna indicazione biografica relativa ai matematici che vengono citati: per gli italiani si rinvia in generale a [Tricomi 1962].

Il quadro che emerge da questi cataloghi, pur nei limiti ad essi imposti, è quello di una fervida, intensa e profonda attività che coinvolge tutti i centri culturali matematici (e Napoli tra questi) nella progettazione, nella fabbricazione, nell'acquisto di modelli e strumenti soprattutto nel trentennio compreso tra il 1880 e il 1910, certamente ancor più ricco di quello delineato in [Carbone Cardone Palladino 1996].

Va ancora segnalato che i cataloghi qui presentati si possono considerare inseriti in un complesso di pubblicazioni tese al recupero delle collezioni di modelli e strumenti italiani e stranieri (si confrontino per l'Italia [Morelli Palladino 1992], [Palladino 1985, 1992, 1995] e in generale per l'estero [Fischer 1986]).

Desideriamo infine ringraziare il Centro Interdipartimentale di Ricerca Audiovisiva per lo Studio della Cultura Popolare dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II" e, in particolare, il dottor Alberto Baldi per la preziosa assistenza fornita nella costituzione del catalogo fotografico.

## 2. CATALOGO GENERALE DEI MODELLI E STRUMENTI

### 2.1. Criteri di catalogazione

Ad ogni modello è associato un numero progressivo secondo i seguenti criteri di catalogazione usuali nel genere: in una scala progressiva di ripartizione, la prima ripartizione è stata effettuata secondo i materiali di cui sono costituiti i modelli e gli strumenti nel seguente ordine: modelli in gesso, modelli in legno e filo, modelli in legno, modelli in cartone, modelli in celluloide, modelli in metallo, modelli in vetro

e metallo; le ultime posizioni, senza distinzione di materiali, sono invece occupate dai modelli frammentari o assai danneggiati.

La seconda ripartizione è stata effettuata secondo le ditte costruttrici; i modelli di cui è ignoto il costruttore occupano all'interno di questa seconda ripartizione le ultime posizioni.

La terza ripartizione è avvenuta secondo la serie del modello nei cataloghi delle ditte costruttrici; la quarta infine è legata alla posizione del modello nella serie; anche in tali casi occupano le ultime posizioni i modelli di cui sia ignota la serie o, all'interno della serie, il numero d'ordine.

Per quanto concerne la sessantina di modelli in gesso delle collezioni Brill e Schilling va notato che, grazie all'esame delle etichette originali, per circa 30 di essi è certa l'attribuzione alle collezioni edite dallo Schilling, per circa 20 quella alle collezioni edite da Brill, mentre i documenti d'epoca e l'esame materiale del modo di fabbricazione consentono di attribuirne congetturalmente una decina alle collezioni Brill, permanendo in qualche caso forte dubbio.

Si è preferito perciò nell'elencazione utilizzare il catalogo Schilling del 1911 che riassorbe tutto il materiale prodotto dalle due case, sia pure con qualche riorganizzazione di serie concernente il materiale pubblicato da Brill.

Il sistema descritto risulta assai utile ai fini espositivi anche in funzione estetica.

In generale al numero d'ordine segue la descrizione in corsivo del modello, l'indicazione tra parentesi dei materiali di cui esso è costituito e, laddove necessario, notizia sullo stato di conservazione o sull'intervento eseguito. Sotto la voce a) viene riportata poi l'etichetta originale (o quanto di essa rimane); tra parentesi quadre vengono date le ricostruzioni congetturali; sotto la stessa voce viene data anche tra parentesi tonde un riferimento ai cataloghi d'epoca; nel caso dei modelli dovuti a Brill, sempre tra parentesi tonde, prima dell'indicazione del catalogo [Schilling 1911], viene data l'indicazione della serie e del numero nella serie che il modello occupa nel detto catalogo; per i modelli dovuti a Brill e Schilling, sempre tra parentesi tonde, dopo l'indicazione del catalogo [Schilling 1911], viene data la

posizione occupata dal modello nella sezione tematica (per argomento) del catalogo stesso e, laddove noto, l'esecutore del modello.

Sotto la voce b) vengono segnalate le menzioni del modello presenti in alcuni documenti che testimoniano la storia del modello stesso a Napoli.

Per quanto concerne la notazione relativa all'inventario, che è l'ultima presente nella voce b), va precisato che se tale segnalazione è contenuta in parentesi tonda, essa è stata tratta direttamente dai libri di inventario, se non lo è, allora essa coincide con l'etichetta inventariale presente sul modello.

Alla voce b) segue talora qualche osservazione particolare relativa allo specifico modello.

Va segnalato infine che un punto interrogativo tra parentesi tonde indica incertezza grave in relazione ad una affermazione congetturale espressa immediatamente prima.

## 2.2. Documenti d'epoca

I documenti d'epoca utilizzati per l'analisi della storia a Napoli degli strumenti sono qui di seguito elencati e brevemente descritti.

[Caporali 1884]: si tratta di una lettera inviata da Caporali presumibilmente a Sannia il 26 giugno 1884, nella quale si discute di un grosso acquisto di modelli da effettuarsi presso Brill (le intere serie prima e settima).

[Cesàro 1906] Nel 1906 sulla base di un'assegnazione speciale di fondi ([Carbone Cardone Casanovas Mancuso Palladino 1998]) Cesàro insieme con altri docenti della facoltà di Scienze matematiche, tra i quali Del Re e Montesano, procedette all'acquisizione di vari modelli e strumenti, e alcuni altri furono progettati e fatti costruire. Nel fondo Cesàro, presso il Dipartimento, si sono conservati numerose missive e documenti relativi a queste operazioni. Si hanno così tre lettere di Coradi di Zurigo, forse il più celebre costruttore dell'epoca di integratori

meccanici, due delle quali pervenute dopo la tragica morte dello stesso Cesàro; minute di lettere di Cesàro a Bardelli, un rinomato costruttore italiano di planimetri; una lettera di Galton.

La documentazione più interessante è costituita dallo scambio epistolare con Schilling: si tratta di tre lettere di Schilling e di 14 minute di lettere di Cesàro (piuttosto mal ridotte e spesso poco interpretabili, senza data, ma talora databili grazie a riferimenti interni ([Carbone Cardone Palladino 1997a]) concernenti sia l'acquisto di varie serie, anche per conto di Montesano, sia l'inizio di un contatto per l'esecuzione da parte dello Schilling di alcuni modelli su progetto di Cesàro.

Lo scambio epistolare con Schilling è preceduto da alcune lettere tra Cesàro e Pascal, allora a Pavia, nel quale il primo, che si avvia a interessarsi all'acquisizione e alla costruzione di modelli, chiede essenzialmente informazioni al secondo, ormai riconosciutamente un esperto.

Il contatto con lo Schilling è accompagnato da uno scambio di lettere con Montesano, nel quale vengono presi accordi sulle serie da acquistare per conto di quest'ultimo, da una lettera di Cesàro a Del Pezzo, tesa a dar notizia sulle ripartizioni avvenute nella Facoltà delle assegnazioni di fondi straordinari, da altre lettere, infine, di Cesàro al Rettore pro-tempore concernenti il pagamento degli acquisti fatti.

Si ha così notizia, in successione di tempo, sugli acquisti delle serie XXII, XXIV, XI, per intero, di parti delle serie IX, XXVIII, XVII, XXX, VI e, per conto di Montesano, di buona parte della serie XIII e di parti delle serie X e XXI.

È da segnalare che, curiosamente, Cesàro pur avendo Del Re effettuato degli acquisti da Schilling sullo scorcio del 1905, si rivolge a Pascal, che peraltro aveva a Pavia contribuito a costituire una raccolta molto significativa di modelli ([Palladino 1997]) per ottenere notizie relative al medesimo Schilling.

Molte delle lettere scambiate insistono infine sul problema del trasporto data la fragilità di molti modelli, soprattutto di quelli in gesso che finiscono talora con l'arrivare a Napoli danneggiati, e, data la novità dell'assegnazione dei fondi d'acquisto, sulle modalità di fatturazione.

In un'altra interessante lettera ad un corrispondente italiano, al momento non identificato, Cesàro dà poi notizie sulla costruzione di alcuni modelli su suoi progetti, in particolare di un modello in metallo della curva di Viviani eseguita da uno studente e di qualche modello eseguito da un operaio napoletano in filo metallico per la realizzazione di lamine liquide aventi superficie d'aria minima secondo gli esperimenti di Plateau a completamento di modelli già acquistati da Schilling.

In un'ultima lettera, infine, anche questa in italiano e diretta ad un destinatario per il momento non identificato, Cesàro ringrazia per il generoso sostegno dato alla costituzione del suo Gabinetto attraverso l'invio gratuito di alcuni modelli relativi alla teoria dell'elasticità.

Nel fondo Cesàro sono presenti anche altri materiali relativi a strumenti e modelli. Così in un quadernetto si ritrovano appunti e figure relativi alla serie XI e alla costruzione del modello della curva di Viviani.

[Del Re 1906]: si tratta di un opuscolo di Del Re sul suo corso di insegnamento di Geometria Descrittiva. In esso vengono date notizie di una quarantina di modelli, soprattutto in legno e filo, costruiti da studenti, di cui viene fornito il nome, a partire dall'anno accademico 1901-1902: si tratta soprattutto di quadriche, elicoidi, conoidi, ma anche di alcune superfici del quarto ordine limitate da coniche. Di tali modelli ne è rimasto, oggi, forse uno solo.

Vengono poi date notizie su una decina di modelli in gesso e in ottone e filo essenzialmente delle quadriche, ma anche qualche rigata cubica, acquistati da Del Re e donati alla Scuola di Geometria descrittiva.

Infine viene segnalato l'acquisto avvenuto, come già osservato, nello scorcio del 1905 su fondi assegnati alla Scuola delle intere serie XI, XIII, XXVIII del Catalogo dello Schilling del 1903 ([Schilling 1903]).

[R.Sc.Politecnica 1911]: si tratta di uno scritto celebrativo della Scuola Politecnica in occasione del centenario della sua fondazione; contiene una

descrizione dell'appena costituito Gabinetto di Meccanica Razionale di Marcolongo quasi certamente redatta da Marcolongo stesso.

Il Gabinetto era parte integrante della Facoltà di Matematica, ma l'insegnamento di Meccanica era in comune con gli aspiranti ingegneri.

Vengono così elencati i modelli e gli strumenti allora di recente acquisizione:

"1. La serie completa dei modelli cinematici di M.Schilling di Lipsia, relativi a moti di figure piane; teoria degli ingranaggi; inversore Peaucellico, Hart, Sylvester; trasformazione di movimenti (modelli n. 18).
2. Un modello del parallelogramma di Watt, un modello per la dimostrazione della composizione delle rotazioni intorno ad assi concorrenti e per i coni rotolanti, in metallo (*Société genèvoise pour la construction d'instruments de Physique et de Mécanique*).
3. Modelli in gesso della superficie delle onde; del moto geodetico su di un ellissoide; del pendolo e della catenaria sferica (M.Schilling, Lipsia).
4. Tre modelli per la realizzazione del moto alla Poinsot (M.Schilling, Lipsia) ed un modello pel moto alla Kowalewski (eseguito dal sig. P.Moreno, Napoli).
5. Un piccolo modello per lo studio delle deformazioni elastiche.
6. Una serie di modelli di giroscopi; pendoli giroscopici, ecc. (Max Kohl, Chemnitzy).
7. Un piccolo stereoscopio e la raccolta delle figure stereoscopiche del Prof. A.G. Greenhill".

L'opuscolo contiene anche una descrizione del Gabinetto di Applicazioni di Geometria descrittiva del quale viene anche riprodotta la sala dei modelli.

Il Gabinetto afferiva alla Regia Scuola ed era ricchissimo di modelli, soprattutto di elementi costruttivi, e di strumenti di calcolo, in particolare meccanico. Nulla delle collezioni del gabinetto è afferito alle collezioni del Dipartimento.

[Pascal 1914]: è un libretto nel quale Pascal descrive i numerosi integrafi da lui messi a punto e realizzati con l'aiuto del già citato Moreno.

La progettazione e la costruzione di integrafi interessò per molti anni Pascal che pubblicò sull'argomento numerose note.

Pascal aveva istituito nella sua abitazione una officina meccanica completa che mostrava con orgoglio ai visitatori ([Picone 1941]).

[Mathesis 1921]: nell'ottobre 1921 si svolse a Napoli un congresso della Società Italiana di Matematiche Mathesis. Marcolongo nell'occasione tenne una relazione sul materiale didattico di insegnamento e in quattro ampie sale della Facoltà di Matematica furono esposti moltissimi strumenti e modelli dei gabinetti diretti da Marcolongo, Pascal e Montesano: i modelli cinematici dello Schilling, modelli di quadriche in cartone del Brill (accenno probabilmente alla serie non numerata in cartone del Brill [Schilling 1911]), integrafi di Pascal e Abakanowicz, regoli calcolatori, l'analizzatore armonico di Coradi, compassi ellittici e per spirali, macchine calcolatrici, giroscopi, tavole sulla composizione dei moti armonici, modelli della curva di von Koch e di Sierpinski, anaglifi, stereoscopi, il Wandergraph, ...

Fu presentata anche una collezione di modelli di poliedri e delle loro decomposizioni ideata e costruita da Raimondo Rossi, un patrocinatore legale in San Buono.

Nella rivista Periodico di Matematiche furono pubblicati gli atti del Congresso e in questi fu dato l'elenco completo dei modelli esposti (si veda anche [Cardone 1996]).

[Marcolongo 1935]: nel 1935 Marcolongo, a conclusione della sua lunga carriera scrisse questo opuscolo che egli stesso in una lettera ad Amodeo definiva il suo "necrologio". Esso contiene una ampia e orgogliosa descrizione di quel Gabinetto di Meccanica Razionale cui aveva dedicato quasi trent'anni di cure. Dà così una lista dei modelli e degli strumenti acquistati (si confronti [Carbone Cardone Palladino 1996] per tale elenco) ed enumera i modelli più significativi costruiti da studenti e laureandi. Questo elenco rappresenta, oltre naturalmente gli integrafi di Pascal, quanto di più raffinato prodotto a Napoli e vale senz'altro la pena di

riportarlo pur essendosi conservato forse un solo strumento (il numero 9 dell'elenco seguente, n. 71 del catalogo generale, mentre un modello in gesso, il n. 55 del catalogo generale conserva ancora l'etichetta originale di appartenenza al Gabinetto di Meccanica Razionale).

"1. Modello di giroscopio della Kowalewski (Lazzarino); 2. Modello per il moto di concoide sferica (sig.na Vatrella) e per concoide piana; 3. Modello per la dimostrazione sperimentale del teorema di Pappo-Guldin (sig. Mazzoleni); 4. Modello per ponte levatoio per la dimostrazione sperimentale del principio di Torricelli; 5. Modello per la visione della curva astroide (sig. Petrucciano); 6. Amplificatore di giri (sig. Vuolo); 7. Modello di pendolo cicloidale; 8. Curve polari nel moto di biella e manovella; 9. Modello pel moto ellittico nello spazio (sig. Iannace); 10. Doppio pendolo (Sicca)."

[Inventario 1944]: si tratta dei libri di inventario e delle etichette inventariali applicate sui modelli al momento della ricognizione inventariale fatte eseguire da Miranda nel 1945 ([Miranda 1977]), ma datata convenzionalmente 1944; si ha l'elenco dei modelli non andati distrutti o smarriti nel corso degli eventi bellici durante i quali i locali dell'Università di Napoli furono utilizzati dalle truppe di occupazione alleata.

L'inventario riporta la presenza di circa 230 modelli dei quali circa 130 appartenevano alle collezioni Brill-Schilling che non venivano distinte con circa 15 doppioni.

Le serie e i numeri segnalati senza riferimento a cataloghi, ma evidentemente delle collezioni Brill-Schilling, sono i seguenti:

Serie I, n. 4, 5, 6;

Serie II, n. 6b, 6c, 7, 8b, 8a, 8d, 9, 10;

Serie V, n. 1, 6;

Serie VII, n. 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 24, 25;

Serie VIII, n. 20, 23, 25, 26, 27;

Serie IX, n. 9;

Serie X, n. 3, 4, 4, 5, 7, 8a, 8b, 10d, 10e, 10l, 10m, 10k, 11a, 11b, 12a, 12a, 12b, 12c, 13;

Serie XIII, n. 1, 6;

Serie XIV, n. 1a, 1b, 2a, 2b, 3;

Serie XVI, n. 9;

Serie XVII, n. 9a, 9b, 9c, 8a, 8b, 10, 12;

Serie XXIV, n. 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12;

Serie XXIV, n. 5, 7, 8, 10, 11, 12;

Serie XXIV, n. 5, 11, 12;

Serie XXV, n. 2, 3, 7;

Serie XXVIII, n. 1, 2, 3, 4;

Serie XXVIII, n. 1, 2, 3, 4;

È indicata poi, probabilmente con un'indicazione erronea, la presenza di una serie XXIII di modelli cinematici con i numeri 1, 2, 3 laddove la serie suddetta nei cataloghi Brill e Schilling non è dedicata a modelli cinematici.

È segnalata anche la presenza di un modello di cartone in due pezzi: il modello appartiene ad una serie dello Schilling, ma gli estensori della ricognizione inventariale non erano più in grado, in assenza di etichette originali, di riconoscerlo e classificarlo.

Viene poi segnalata la presenza di 10 tavole dell'Ehrhard che vengono identificate come *Modelli "Schattenconstruction"* con i numeri 9, 11, 15, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28 e di 5 tavole dello Schröder, identificate come *Modelli di geom. Descrittiva Serie I* con i numeri 2, 11 e *Modelli di geom. Descrittiva Serie II* con i numeri 3, 4, 26, 27; tuttavia nel caso dei modelli dello Schröder deve esservi stato un errore di trascrizione in quanto attualmente mancano le tavole 3 e 4, ma esiste una tavola 34.

Sono poi elencati genericamente 48 modelli in legno, con un unico numero d'inventario, tra i quali certamente devono essere stati annoverati parti, staccatesi, dalle tavole dell'Ehrhard e dello Schröder.

Sono segnalati anche modelli di curve in 5 pezzi, modelli di superficie algebriche in 7 pezzi, una superficie cubica, un iperboloide ellittico, un ellissoide, un paraboloide ellittico, una superficie di equazione $z = xy^2/(x^2+y^4)$, un elicoide, due antiparallelogrammi articolati, un duplicatore di giri, 6 giroscopi, un modello di composizione di moti per la sfera, un compasso per spirali, un pendolo pesante, due bielle a manovella, un modello di moto sferico, uno stereoscopio, un goniometro e 5 integrafi.

È presumibile comunque che un compasso per ellissi sia stato identificato erroneamente come compasso per spirali, mentre uno strumento atto a descrivere un movimento rettilineo sia stato invece descritto genericamente come una biella a manovella.

Ad ogni voce su elencata corrisponde un numero di inventario complessivo, salvo che agli antiparallelogrammi, ai giroscopi, agli integrafi, alle bielle a manovella, a ciascuno dei quali ne corrisponde uno individuale.

A ciascun numero viene fatto corrispondere una valutazione in lire e l'indicazione delle quantità di oggetti che costituiscono la voce.

Alle indicazioni dell'inventario corrispondono le etichette applicate sui modelli.

L'inventario appare in generale attendibile laddove esisteva un'etichetta originale, pur presentando qualche errore di trascrizione e di lettura delle etichette stesse, almeno nei casi ove è stato possibile fare un raffronto; è assai generico e talora erroneo dove invece le etichette originali erano andate smarrite o erano assai frammentarie.

### 2.3. Consistenza attuale e valore d'epoca delle collezioni

Attualmente sono presenti circa 120 modelli: circa 80 delle collezioni Brill-Schilling, 64 dei quali in gesso, 2 in filo metallico e legno, 4 in celluloide, 1 in cartone, 4 in metallo e vetro, uno dei quali frammentario, 1 compasso per ellissi in metallo; 10 tavole in legno dell'Ehrhard delle quali una frammentaria; 5 dello

Schröder, una delle quali attribuita in maniera fortemente dubitativa e assai malridotta; 21 in legno, 5 dei quali della Cussons; 1 modello in metallo della Société Genèvoise pour la construction d'instruments de physique; 2 integrafi, dei quali uno assai frammentario e l'altro della Società fabbricazione apparati e materiali elettrici, Napoli; 1 modello in filo e legno; un sostegno per modelli in legno: dei tre rimanenti modelli in gesso, due offrono problemi di identificazione.

Alcuni modelli e strumenti sono di ideazione napoletana: un modello in gesso progettato da G. Andreoli nel 1927, quando era a Catania, un modello in legno progettato da Marcolongo e realizzato da uno studente, Iannace, nel 1924, un modello in legno eseguito da un altro studente, Tafuri, nel 1909, un modello in legno e fili, progettato da Del Re nel corso dell'anno accademico 1901-1902, i due integrafi concepiti da Pascal.

Per quanto concerne il costo d'epoca dei modelli e degli strumenti, esso non è stato riportato, ma, per lo più, è facilmente reperibile nei cataloghi; si può osservare in generale una forte dipendenza, naturalmente, dalla difficoltà di costruzione: si andava, ad esempio, da 1,60 marchi di un ellissoide in gesso ([Schilling 1911] serie III n. 1) ai 200 marchi di un modello di proiezione di un solido a 4 dimensioni in filo di seta ([Schilling 1911] serie XV n. 6).

Si può azzardare comunque un valore medio di 15 marchi per i modelli in gesso, con punte in basso, come si è detto, a 1,60 e in alto a 26, 50 marchi per una superficie del IV ordine ([Schilling 1911] serie IX n. 6).

Nelle importanti serie cinematiche (XXIV e XXXI del Catalogo Schilling) i modelli erano valutati in media 60 marchi.

I modelli in filo erano per lo più assai costosi e il loro prezzo medio si poteva aggirare sui 120 marchi con punte in alto come detto a 200 e in basso ai 20, 30 marchi.

Il costo dei modelli in legno di compenetrazione tra solidi della Cussons oscillava intorno a 8 scellini, mentre il costo delle tavole, sempre in legno, dello Schröder e dell'Ehrhard era intorno ai 30, 40 marchi.

A titolo di confronto si può osservare che un testo di Matematica della Teubner sulle 400 pagine e qualche figura poteva avere un costo di circa 10 marchi ([Teubner 1908])[0].

## 2.4. Catalogo Generale

1. *Superficie di rotazione con curvatura costante negativa: superficie di rotazione della trattrice* (Modello in gesso).

a) Rotationsfläche der Tractrix, Verl. v. L.Brill, 1. Ser. Nr. [4] (?) (1. Ser. Nr. 1 di [Schilling 1911]; 230; Bacharach).

b) [Caporali 1884]; [Inventario 1944] nr. 4331, I 4.

2. *Superficie del dodicesimo ordine: "superficie-centro" di un iperboloide a una falda* (Modello in gesso).

a) Centrafläche des Hyperboloids, Verl. v. L.Brill, 1. Ser. Nr. [6](?)b (1. Ser. Nr. 3b di [Schilling 1911]; 123; Dyck).

b) [Caporali 1884]; [Inventario 1944] nr. 4331, I 6.

3. *Ellissoide con linee geodetiche* (Modello in gesso).

a) Geodät. Linien des Ellipsoid, Verl. v. L.Brill, 1. Ser. Nr. V (1. Ser. Nr. 5 di [Schilling 1911]; 214; Rohn).

[0] Se si desidera avere una valutazione orientativa (e solo orientativa) in termini moderni, si può utilizzare il valore odierno dell'equivalente in oro del marco d'epoca (che valeva lire 1,25 e conteneva circa 0,363 grammi d'oro); si ottiene così un valore di circa lire 6530 sulla base di un valore attuale dell'oro di circa lire 18000 a grammo. Naturalmente si può anche convertire il marco d'epoca in lire d'epoca e applicare le tabelle usuali di rivalutazione della lira dal 1905 (ad esempio quelle di fonte ISTAT sul costo della vita) si ottiene così un valore di lire 6975 del 1995 per un marco del 1905.
Applicando analoghe considerazioni alla sterlina d'epoca il cui equivalente in oro era di 7,32 grammi e che valeva lire 25,24, si ottengono rispettivamente lire 131760 e lire 140839.

b) [Caporali 1884]; [Del Re 1906] nr. 42; [R.Sc.Politecnica 1911]; [Inventario 1944] nr. 4331, I 5.

4. *Superficie di Kummer con otto punti nodali reali* (Modello in gesso).

a) Kummer'sche Fläche, Verl. v. L.Brill, 2. Ser. Nr. VIb (2. Ser. Nr. 1b di [Schilling 1911]; 96; Rohn).

b) [Inventario 1944] nr. 4332, VI, 6b.

5. *Superficie di Kummer con quattro punti nodali reali* (Modello in gesso).

a) Kummer'sche Fläche, Verl. v. L.Brill, 2. Ser. Nr. VIc (2 Ser. Nr. 1c di [Schilling 1911]; 97; Rohn).

b) [Inventario 1944] nr. 4332, II 6c.

6. *Superficie di rotazione con curvatura media costante: Nodoide* (Modello in gesso).

a) Rotationsfl. const. mittl. Krümmg, Verl. v. L.Brill, [2]. Ser. Nr. VIIIb (2. Ser. Nr. 3b di [Schilling 1911]; 240; Braunmühl).

b) ([Inventario 1944] nr. 4332).

7. *Superficie di rotazione con curvatura media costante: Catenoide* (Modello in gesso).

a) Rotationsfl. const. mittl. Krümmg, Verl. v. L.Brill, 2. Ser. Nr. VIIId (2 Ser. Nr. 3d di [Schilling 1911]; 242; Braunmühl).

b) [Inventario 1944] nr. 4332, II 8d.

8. *Superficie di rotazione con curvatura costante negativa di tipo conico* (Modello in gesso).

a) Rotationsfläche const. negat. Krümmg, Verl. v. L.Brill, 2. Ser. Nr. 9 (2 Ser. Nr. 4 di [Schilling 1911]; 228; Bacharach).

b) [Inventario 1944] nr. 4332, II 9.

9. *Superficie di rotazione con curvatura costante negativa di tipo iperbolico* (Modello in gesso).

a) [Rotationsfl.] const. negat. Krümmg, [Verl. v. L.Brill], 2. Ser. Nr. [10] (?) (2. Ser. Nr. 5 di [Schilling 1911]; 229; Dyck).

b) [Inventario 1944] nr. 4332, II 10.

10. *Modello rappresentativo della funzione ellittica* $\varphi = am(u,k)$ (Modello in gesso).

a) [Modelle für die elliptische Function $\varphi = am(u,k)$, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 5. Serie, Nr. 1] ([Schilling 1911]; 317; Wolff).

b) [Inventario 1944] nr. 4333, V 1.

Sul gesso è impressa la formula: $u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$

11. *Superficie d'onda di Fresnel per cristalli ottici* (Modello in gesso, incompleto).

a) [Fresnel'sche We]llenfläche, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 6. Serie, Nr. 1. ([Schilling 1911]; 358).

b) [Marcolongo 1935], [Inventario 1944] nr. 4334, VI 1.

12. *Ellissoide con gli assi uguali a quelli della superficie di Fresnel per cristalli ottici biassici* (Modello in gesso)

a) Ellipsoid, Verl. v. Martin Schilling, Leipz[ig], 6. Serie, Nr. 2 ([Schilling 1911]; 359).

b) [Marcolongo 1935]; [R.Sc.Politecnica 1911]; [Inventario 1944] nr. 4334, VI 2.

Questo modello coincide con quello descritto in 13, ma nell'etichetta figura la sede Leipzig e non Halle a.S. per la ditta Schilling.

13. *Ellissoide con gli assi uguali relativo alla superficie d'onda di Fresnel per cristalli ottici biassici* (Modello in gesso).

a) Ellipsoid, [Verl. v. Martin] Schilling, Halle a.S., [6]. Serie, Nr. 2. ([Schilling 1911]; 359).

b) [Marcolongo 1935]; [R.Sc.Politecnica 1911]; [Inventario 1944] nr. 4334, VI 2.

Questo modello coincide con quello descritto in 12.

14. *Superficie d'onda con linee sferiche* (Modello in gesso).

a) [Fresnel]sche Wellenfl. mit sphär. Linien, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., [6]. Serie, Nr. 4. ([Schilling 1911]; 360).

b) [Cesàro 1906] lettera a Schilling; [Marcolongo 1935]; [Inventario 1944] nr. 4334, VI 4.

15. *Superficie cubica non rigata: superficie diagonale di Clebsch con ventisette rette reali* (Modello in gesso).

a) [Fläche dritter Ordnung: Diagonalfläche mit 27 reellen Geraden, Verl. v. L.Brill, 7. Ser. Nr. 15 (?)] (7. Ser. Nr. 1 di [Schilling 1911]; 44; Rodenberg).

b) [Caporali 1884]; [Inventario 1944] nr. 4335, VII, 15.

16. *Superficie del terzo ordine con quattro punti nodali conici $C_2$ reali* (Modello in gesso).

a) Fläche dritter Ordnung, Verl. v. L.Brill, 2. Ser. Nr. VII (7. Ser. Nr. 2 di [Schilling 1911]; 45; Rodenberg)

b) [Inventario 1944] nr. 4332, II 7.

17. *Superficie del terzo ordine con 4 punti nodali conici reali* (Modello in gesso).

a) Fl. 3. Ord. mit 4 reellen con. Knpktn., Verl. v. L.Brill, 7. Ser. Nr. 4 (7. Ser. Nr. 4 di [Schilling 1911]; 47; Rodenberg).

b) [Caporali 1884], ([Inventario 1944] nr. 4335).

18. *Superficie del terzo ordine con quattro punti nodali conici $C_2$ reali* (Modello in gesso).

a) Fl. 3. Ord. mit [4 reellen conischen Knotenpunkt.], Verl. v. L.Brill, 7. Ser. Nr. [5 o 8 o 12 o 13] (?)(7. Ser. Nr. 6 di [Schilling 1911]; 49; Rodenberg).

b) [Caporali 1884]; ([Inventario 1944] nr. 4335).

19. *Superficie del terzo ordine, non rigata, con tre punti nodali biplanari reali $B_3$* (Modello in gesso).

a) [Fläche mit 3 reellen $B_3$, Verl. v. L.Brill, 7. Ser. Nr. 6 (?)] (7. Ser. Nr. 9 di [Schilling 1911]; 52;Rodenberg).

b) [Caporali 1884]; [Inventario 1944] nr. 4335, VII 6.

20. *Superficie del terzo ordine con un punto nodale biplanare reale $B_4$ e due punti nodali conici $C_2$ immaginari* (Modello in gesso).

a) [Fläche mit $B_4$ + 2 imaginären $C_2$, Verl. v. L.Brill, 7. Ser. Nr. 7] (7. Ser. Nr. 13 di [Schilling 1911]; 56; Rodenberg).

b) [Caporali 1884], [Inventario 1944] nr. 4335, VII 7.

21. *Superficie del terzo ordine, non rigata, con un punto nodale biplanare $B_5$ e un punto nodale conico $C_2$* (Modello in gesso).

a) Fl. 3. Ord. mit [1] Knotenpunkt $B_5$, Verl. v. L.Brill, [7] (?). Ser. Nr. 14 (7. Ser. Nr. 14 di [Schilling 1911]; 57;Rodenberg).

b) [Caporali 1884], [Inventario 1944] nr. 4335; VII 14.

22. *Superficie cubica non rigata con punto nodale uniplanare $U_6$ ed il cui piano tangente contiene una retta reale* (Modello in gesso).

a) Fl. 3. Ord. mit unipl. Knotenpunkt. $U_6$, Verl. v. L.Brill, 7. Ser. Nr. 17 (7. Ser. Nr. 17 di [Schilling 1911]; 60; Rodenberg).

b) [Caporali 1884], [Inventario 1944] nr. 4335, VII 17.

23. *Superficie cubica non rigata con punto nodale uniplanare $U_7$ ed il cui piano tangente contiene tre rette reali* (Modello in gesso).

a) Fl. 3. Ord. mit unipl. Knotenpunkt. $U_7$, Verl. v. L.Brill, 7. Ser. Nr. 18 (7. Ser. Nr. 18 di [Schilling 1911]; 59; Rodenberg).

b) [Caporali 1884], [Inventario 1944] nr. 4335, VII 16.

Il modello porta il numero 18 indicato anche sul gesso; l'indicazione VII 16 dell'etichetta inventariale è pertanto erronea e da leggersi come VII 18.

24. *Superficie cubica non rigata con punto nodale uniplanare $U_8$* (Modello in gesso).

a) Fl. 3. Ord. mit unipl. Knotenpunkt. $U_8$, Verl. v. L.Brill, 7. Ser. Nr. [19] (?)(7. Ser. Nr. 19 di [Schilling 1911]; 48; Rodenberg).

b) [Caporali 1884], ([Inventario 1944] nr. 4335) (?).

Direttamente sul gesso è apposto il numero 19, anche se nell'inventario non risulta presente un modello 19 della serie settima.

25. *Superficie rigata del terzo ordine, della cui retta doppia solo un segmento è l'intersezione di due falde reali* (Modello in gesso).

a) Regelfläche 3. Ordnung, Verl. v. L.Brill, 7. Ser. Nr. 21 (7. Ser. Nr. 21 di [Schilling 1911]; 68; Rodenberg).

b) [Caporali 1884], [Inventario 1944] nr. 4335, VII 21.

26. *Superficie del quarto ordine: superficie hessiana di una superficie del terzo ordine con quattro punti nodali conici reali* (Modello in gesso).

a) [Hesse'sche Fläche zur Fläche mit vier reellen conischen Knotenpunkten, Verl. v. L.Brill, 7. Ser. Nr. 24a] (7. Ser. Nr. 24a di [Schilling 1911]; 64; Rodenberg).

b) [Caporali 1884], [Inventario 1944] nr. 4335, VII, 24.

27. *Superficie del quarto ordine: superficie hessiana di una superficie del terzo ordine con tre punti nodali conici* (Modello in gesso).

a) Hesse'sche Fl. einer Fl. 3. Ord., Verl. v. L.Brill, 7. Ser. Nr. 25 (7. Ser. Nr. 25 di [Schilling 1911]; 66; Rodenberg).

b) [Caporali 1884], [Inventario 1944] nr. 4335, VII, 25.

28. *Superficie minima (o minimale) del nono ordine, secondo Enneper* (Modello in gesso).

a) Minimalfläche 9. Ordnung, Verl. v. L.Brill, 8. Ser. Nr. 21 (8 Ser. Nr. 2 di [Schilling 1911]; 246; Herting).

b) [Inventario 1944] nr. 4336, VIII 20.

L'etichetta inventariale è erronea in quanto l'etichetta originale porta l'indicazione chiaramente leggibile di serie ottava, modello ventunesimo.

29. *Superficie del dodicesimo ordine; superficie focale dei raggi uscenti da una linea luminosa dopo la loro riflessione su di un cilindro il cui asse incontra la linea* (Modello in gesso).

a) Fläche 12. Ord., Verl. v. L.Brill, 8. Ser. Nr. [26] (?) (8 Ser. Nr. 3 di [Schilling 1911]; 117; Finsterwalder).

b) [Inventario 1944] nr. 4336, VIII 27.

L'etichetta inventariale è erronea in quanto attribuisce a questo modello lo stesso numero nella serie che al modello 33, ove peraltro si è conservata l'etichetta originale che riporta 8. 27.

30. *Rappresentazione di un rilievo prospettico* (Modello in gesso).

a) Reliefperspectiv. Darstellung, Verl. v. L.Brill, 8. Ser. Nr. XXIII (8 Ser. Nr. 4 di [Schilling 1911]; 283; Thoma).

b) [Inventario 1944] nr. 4336, VIII 23.

31. *Superficie sghemba elicoidale, superficie minima, con linee di curvatura e curve asintotiche, applicabile sul Catenoide* (Modello in gesso).

a) [Windschiefe Schraubenfläche, Minimalfläche, nebst Krümmungslinien und Asymptotencurven; Verl. v. Martin Schilling, 8. Ser. Nr. 6a ([Schilling 1911]; 245; Herting).

b) ([Inventario 1944] nr. 4348).

32. *Catenoide con linee di curvatura e curve asintotiche* (Modello in gesso).

a) Catenoid, Verl. v. L.Brill, 8. Ser. Nr. XXVc (8 Ser. Nr. 6c di [Schilling 1911]; 243).

b) [R. Sc. Politecnica 1911]; [Inventario 1944] nr. 4336, VIII 25c.

33. *Ellissoide e Superficie ad elica* (Modello in gesso).

a) Ellipsoid und Schraubenfläche., Verl. v. L.Brill, 8. Ser. Nr. XXVII (8 Ser. Nr. 7c di [Schilling 1911]; 235).

b) [Inventario 1944] nr. 4336, VIII, 27.

34. *Superficie del quarto ordine con una retta doppia* (Modello in gesso).

a) Fl. 4. Ord. mit 1 Doppelgeraden, Verl. v. L.Brill, 9. Ser. Nr. 9 (9. Ser. Nr. 9 di [Schilling 1911]; 104; da originali di Kummer).

b) [Cesàro 1906] lettera a Schilling; [Inventario 1944] nr. 4337, IX 9.

35. *Ellissoide a tre assi, in gesso, scomponibile in due parti lungo un taglio circolare* (Modello in gesso).

a) Ellipsoid mit Kreisschnitt., Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 3. ([Schilling 1911]; 5).

b) [Marcolongo 1935]; ([Inventario 1944] nr. 4338).

36. *Superficie del quarto ordine con due rette doppie che si tagliano ("Volta boema")* (Modello in gesso).

a) [Fläche 4 Ord.], Enveloppe eines Kreis[es], M.Schilling. Halle a.S., 10. Serie Nr. 4 ([Schilling 1911]; 105; Finsterwalder).

b) [Cesàro 1906] lettera a Schilling; ([Inventario 1944] nr. 4338).

L'acquisto del modello, di cui nella lettera di Cesàro a Schilling, avviene per conto di D. Montesano.

37. *Ciclide parabolica ad anello con quattro punti nodali immaginari* (Modello in gesso).

a) [Dupin'sche] Cyclide, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., [10] Serie, Nr. 5. ([Schilling 1911]; 91; Finsterwalder).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, X 5.

38. *Superficie d'onda per i cristalli ottici positivi monoassici* (Modello in gesso).

a) Wellenfläche für pos. Opt. Einax. Kryst., Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 7. ([Schilling 1911]; 357).

b) [Marcolongo 1935]; ([Inventario 1944] nr. 4338).

39. *Ciclide con due punti nodali immaginari coniugati e uno reale* (Modello in gesso).

a) Cyclide mit 1 Syst. Sphär. Krümmgs., Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 8b ([Schilling 1911]; 93; Finsterwalder).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, X 8b.

40. *Superficie generata dalla rotazione di un'iperbole equilatera con incise le curve asintotiche* (Modello in gesso).

a) Rotat.-Fl. mit Asymptoten-Curven, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 10d. ([Schilling 1911]; 199; Herting).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, X 10d.

41. *Superficie generata dalla rotazione di una spirale logaritmica con incise le curve asintotiche* (Modello in gesso).

a) Rota[t.-Fl. mit Asymp]toten-Curven, Verl. [v. Martin Schi]lling, Halle a.S., [10. Serie,] Nr. 10e. ([Schilling 1911]; 201; Herting).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, X 10e.

42. *Superficie generata dalla rotazione di una parabola con incise le curve asintotiche* (Modello in gesso).

a) Rotat.-Fl. mit Asymptoten-Curven, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 10k. ([Schilling 1911]; 202; Herting).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, X 10k.

43. *Superficie generata dalla rotazione di una parabola di Neil con incise le curve asintotiche o di tangenza principale* (Modello in gesso).

a) [Rotat.-Fl. mit Asymptoten-Curven, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 10f] ([Schilling 1911]; 206; Herting).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, X 10f.

44. *Superficie generata dalla rotazione di una sinusoide con incise le curve asintotiche o di tangenza principale* (Modello in gesso).

a) [Rotat.- Fl. mit Asymptoten-Curven, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 10m] ([Schilling 1911]; 207; Herting).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, XIV 10m.

45. *Corpo configurato a forma di fagiolo per la determinazione sperimentale delle curve paraboliche, delle linee di curvatura e delle linee asintotiche* (Modello in gesso).

a) Versuchsobject, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 11a ([Schilling 1911]; 194).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, X 11a.

46. *Corpo configurato a forma di fagiolo per la determinazione sperimentale delle curve paraboliche, delle linee di curvatura e delle linee asintotiche* (Modello in gesso).

a) Versuchsobject, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 11b. ([Schilling 1911]; 195).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, X 11b.

47. *Inviluppo di linee geodetiche uscenti da un punto di un ellissoide a tre assi* (Modello in gesso).

a) Envel. geod. Lin[ien, die von einem] Punkt ausg., Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 12a. ([Schilling 1911]; 219; Braunmühl).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, X 12a.

48. *Inviluppo di linee geodetiche uscenti da un punto di un ellissoide di rotazione schiacciato* (Modello in gesso).

a) Envel. geod. Lin., die v. 1 Punkt ausg., Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 12b ([Schilling 1911]; 218; Braunmühl).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, X 12b.

49. *Inviluppo di linee geodetiche uscenti da un punto di un ellissoide di rotazione allungato* (Modello in gesso).

a) Envel. geod. Lin., die v. 1 Punkt ausg., Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 12c ([Schilling 1911]; 216; Braunmühl).

b) [Inventario 1944] nr. 4338, X 12c.

50. *Ellissoide avente i tre assi nella proporzione 1:2:3* (Modello in gesso).

a) Axenverhältnis 1:2:3, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 10. Serie, Nr. 13 ([Schilling 1911]; 4).

b) [Marcolongo 1935]; ([Inventario 1944] nr. 4338).

51. *Modello rappresentativo della funzione di variabile complessa* $w^2 = z^2-1$ (Modello in gesso).

a) $w^2 = z^2-1$, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 14. Serie, Nr. 1a. ([Schilling 1911]; 307; Wildbrett)

b) [Inventario 1944] nr. 4339, XIV 1a.

52. *Modello rappresentativo della funzione di variabile complessa* $w^2 = z^2-1$ (Modello in gesso).

a) $w^2 = z^2-1$, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 14. Serie, Nr. 1b ([Schilling 1911]; 307; Wildbrett).

b) [Inventario 1944] nr. 4339, XIV 1b.

53. *Modello rappresentativo della funzione di variabile complessa* $w^2 = z^4-1$ (Modello in gesso).

a) $w^2 = z^4-1$, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 14. Serie, Nr. 2a. ([Schilling 1911]; 308; Wildbrett).

b) [Inventario 1944] nr. 4339, XIV 2a.

54. *Modello rappresentativo della funzione di variabile complessa* $w^4 = 1- z^2$ (Modello in gesso).

a) $w^4 = 1- z^2$, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 14. Serie, Nr. 3 ([Schilling 1911]; 309; Wildbrett).

b) [Inventario 1944] nr. 4339, XIV 3.

55. *Combinazione di un ellissoide con un iperboloide a una falda e con un iperboloide a due falde confocali* (Modello in gesso).

a) Vereinigung eines Ellipsoids m. einem confokalen einschaligen und einem confokalen zweischaligen Hyperboloid, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 16. Serie, Nr. 9. ([Schilling 1911]; 185).

b) [Marcolongo 1935], [Inventario 1944] nr. 4340, XVI 9.

Sul modello si è conservata un'etichetta con la dicitura "R. Università di Napoli-Gabinetto di Meccanica Razionale n° Inventario 91".

56. *Variazione di configurazione di una corda vibrante perturbata; propagazione di onde verticali (per la corda di pianoforte)* (Modello in gesso).

a) Gestaltsändergn. d. gezupft. schwingden Saite, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 17. Serie, Nr. 8a ([Schilling 1911]; 361; Schellenberg).

b) [Inventario 1944] nr. 4342, XVII 8a.

57. *Variazione di configurazione di una corda vibrante perturbata; propagazione di onde verticali (per la corda di violino)* (Modello in gesso).

a) [G]estaltsändergn. d. angeschl. schwing[den] Saite, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 17. Serie, Nr. 8b ([Schilling 1911]; 362; Schellenberg).

b) [Inventario 1944] nr. 4342, XVII 8b.

58. *Diffusione del calore in una sbarra a una data temperatura iniziale* (Modello in gesso).

a) Wärmeströmung in einem [Stabe bei anfängl.] gegeb Anfangstempe[ratur], Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 17. Serie, Nr. 9a ([Schilling 1911]; 363; Schellenberg).

b) [Inventario 1944] nr. 4342, XVII 9a.

59. *Diffusione del calore in una sbarra rispetto a un'assegnata caduta termica* (Modello in gesso).

a) Wärmeströmung in einem [Stabe bei] anfängl. gegeb Temperaturgefäl[le], Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 17. Serie, Nr. 9b ([Schilling 1911]; 364; Schellenberg).

b) [Inventario 1944] nr. 4342, XVII 9b.

60. *Diffusione del calore in un anello metallico a una data temperatura iniziale* (Modello in gesso).

a) Wärmeströmung in einem Ringe bei gegen. Anfangstemperatur, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 17. Serie, Nr. 9c. ([Schilling 1911]; 365; Schellenberg).

b) ([Inventario 1944] nr. 4342).

61. *Due falde, semplicemente connesse, di una superficie di Riemann* (Modello in gesso).

a) Einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche mit 1 Windungspunkt 1. Ordnung, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 17. Serie, Nr. ([Schilling 1911]; 303).

b) [Inventario 1944] nr. 4342, XVII 10.

L'etichetta originale indica come il numero di serie il 16, ma tale numero è modificato in 17 a penna, in inchiostro antico, in accordo con i cataloghi Schilling 1903 e 1911.

62. *Superficie di Riemann, triplicemente connessa, con una linea di diramazione che si rivolge su se stessa* (Modello in gesso, spezzato in due parti).

a) [Dreifach zusammenhängen]de Riemann'sche Fläche [mit einer in sich zurück-k]ehrerden Begrenzungslinie, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 17. Serie, Nr. 12. ([Schilling 1911]; 305).

b) [Cesàro 1906] ?, [Inventario 1944] nr. 4342, XVII 12.

L'etichetta originale indica come numero di serie il 16, ma tale numero è modificato in 17 a penna, in inchiostro antico, in accordo con i cataloghi Schilling 1903 e 1911.

In una minuta di una lettera di Cesàro a Schilling vi è un cenno a una superficie di Riemann giunta *brisée*.

63. *Superficie di Boy, figura topologicamente equivalente al piano proiettivo, dotato di tre estremi* (Modello in gesso).

a) Abbildung der projectiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene singularitätenfreie Fläche nach Hilbert, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 30. Serie, Nr. 1 ([Schilling 1911]; 298; Boy).

b) [Cesàro 1906] lettera a Schilling, [Inventario 1944] nr. 4341, XXX 1.

64. *Superficie di Boy, topologicamente equivalente al piano proiettivo, dotato di un asse di simmetria* (Modello in gesso).

a) Symmetrisches Bild der projectiven Ebene, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 30. Serie, Nr. 2 ([Schilling 1911]; 299; Boy).

b) [Cesàro 1906] lettera a Schilling; [Inventario 1944] nr. 4341, XXX 2.

65. *Superficie cubica non rigata* (Modello in gesso).

b) ([Inventario 1944] nr. 4343).

66. *Modello non identificato* (Modello in gesso).

67. *Modello della funzione di 2 variabili* $z = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, *discontinua per* $x = y = 0$ (Modello in gesso).

a) Modello di discontinuità della funzione di 2 variabili $z = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ Discontinuità per $x = y = 0$. $\lim_{x=y=0} z = 0$, $\lim_{x=ky^2=0} z = k$. Università di Catania 1926, Cattedra di Calcolo, Prof. G. Andreoli.

b) [Inventario 1944] nr. 4347.

68. *Modello atto a mettere in evidenza gli elementi di regresso (punto, retta tangente, piano osculatore) di una curva gobba* (Modello in legno e fil di ferro).

a) [Drahtmodelle über die Projectionen einer unebenen Curve, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 11 Serie, Nr. 1] ([Schilling 1911]; 134).

b) [Cesàro 1906] lettera a Schilling, lettera da Schilling 28-2-1906; [Del Re 1906] nr. 50; ([Inventario 1944] nr. 4380).

69. *Modello atto a mettere in evidenza gli elementi di regresso (punto, retta tangente, piano osculatore) di una curva gobba* (Modello in legno e fil di ferro).

a) [Drahtmodelle über die Projectionen einer unebenen Curve, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S.,11 Serie, Nr. 8.] ([Schilling 1911]; 141).

b) [Cesàro 1906] lettera a Schilling, lettera da Schilling 28-2-1906, [Del Re 1906] nr. 50; ([Inventario 1944] nr. 4380).

70. *Quartica rigata limitata da due coniche* (Modello in legno e filo).

a) Istituto di Geometria descrittiva.

b) [Del Re 1906] nr. 1(?); ([Inventario 1944] nr. 4381).

Si tratta quasi certamente dell'unico modello pervenuto dei tanti fatti costruire da Del Re.

71. *Ellissi che rotolano l'una sull'altra* (Modello in legno parzialmente ricostruito).

a) Alla R. Univ. di Napoli, Ernesto Iannace 16/5/1924.

b) [Marcolongo 1935], ([Inventario 1944] nr. 4372).

Il modello ispirato al modello 8 della serie 24 edita da M. Schilling ([Schilling 1911]; 347), fu eseguito da uno studente della Facoltà di Matematica. È forse l'unico modello pervenuto dei tanti fatti costruire da Marcolongo.

72. *Modello atto a mettere in evidenza il teorema di Dandelin* (Modello in legno parzialmente ricostruito).

a) Bewegliches Holzmodel zur Erläut[erung] des Dandelin' schen Satzes. [Verlag v. Martin Schilling], Halle a.S., [32 Serie, Nr. 2.] ([Schilling 1911]; 277; Kötter).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

73. *Compenetrazione di solidi: cilindri circolari retti di uguale diametro* (Modello in legno).

a) [Models of Penetration, Two Cylinders (equal size), nr. 3582/4] ([Cussons]).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

74. *Compenetrazione di solidi: cono circolare retto con parallelepipedo a base quadrata* (Modello in legno).

a) [Models of Penetration, Cone and Square prism, nr. 3582/6] ([Cussons]).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

75. *Compenetrazione di solidi: cilindri circolari retti di diverso diametro* (Modello in legno).

a) [Models of Penetration, Two Cylinders (obliquely), nr. 3582/11] ([Cussons]).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

76. *Compenetrazione di solidi: toro con cilindro circolare retto* (Modello in legno).

a) [Models of Penetration, Anchor Ring and Cylinder, nr. 3582/13] ([Cussons]).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

77. *Compenetrazione di solidi: sfera con cilindro circolare retto* (Modello in legno).

a) [Models of Penetration, Sphere and Cylinder (eccentrically), nr. 3582/15] ([Cussons]).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

78. *Compenetrazione di solidi: tre cilindri circolari retti di uguale diametro* (Modello in legno).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

79. *Sezione piana obliqua del toro* (Modello in legno)

a) Sezione piana del toro - S. Tafuri 1909.

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

Il modello fu eseguito dallo studente S.Tafuri della Facoltà di Matematica nel 1909.

80. *Cupola quadrangolare* (Modello in legno).

b) [Inventario 1944] nr. 4375.

81. *Prisma obliquo a base triangolare* (Modello in legno).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

82. *Cilindro circolare obliquo* (Modello in legno).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

83. *Tronco di cono con cavità interna anch'essa conica* (Modello in legno).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

84. *Sezione perpendicolare del toro* (Modello in legno).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

85. *Tronco di cono obliquo circolare* (Modello in legno).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

86. *Campanile* (Modello in legno).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

87. *Prisma retto a base triangolare* (Modello in legno, assai danneggiato).

a) ([Cussons]) (?)

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

88. *Cubo decomponibile in parallepipedi* (Modello in legno, incompleto).

a) R. Università Scu. e Gab. Geom. Descritt. (marchio).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

89. *Frammento di modello: due parallelepipedi* (Modello in legno).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

90. *Frammento di modello: parallelepipedo* (Modello in legno).

b) ([Inventario 1944] nr. 4375).

91. *Compenetrazione di solidi* (Modello in legno, incompleto).

a) Darstellende Geometrie, constr. u. lith. v. J.Schöder, Darmstadt, Abth:I, Taf: 11.

b) [Inventario 1944] nr. 4377.

92. *Compenetrazione di solidi: cono circolare retto con sfera, cono ellittico retto con ellissoide* (Modello in legno, parzialmente ricostruito).

a) Darstellende Geometrie, constr. u. lith. v. J.Schöder, Darmstadt, Abth:II, Taf: 27.

b) ([Inventario 1944] nr. 4378).

93. *Compenetrazione di solidi: cono circolare retto e cilindro circolare retto (i. assi paralleli; ii) assi perpendicolari; iii) assi obliqui)* (Modello in legno, parzialmente ricostruito).

a) Darstellende Geometrie, constr. u. lith. v. J.Schöder, Darmstadt, Abth:II, Taf: 34.

b) ([Inventario 1944] nr. 4378).

94. *Proiezione, col metodo delle luci ed ombre, di una madrevite* (Modello in legno).

a) Schattenconstruction, Fig. 29 Durchschmith der flachgängingen Mutter, Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Comp., Bensheim (Hessen), Taf. 20.

b) ([Inventario 1944] nr. 4376).

95. *Proiezione, col metodo delle luci ed ombre, del supporto di un perno* (Modello in legno).

a) Schattenconstruction, Fig. 33 Zapfenlager, Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Comp., Bensheim (Hessen), Taf. 24.

b) ([Inventario 1944] nr. 4376).

96. *Proiezione, col metodo delle luci ed ombre, di una vite* (Modello in legno).

a) Schattenconstruction, [..], Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Comp., Bensheim (Hessen), Taf. 26.

b) ([Inventario 1944] nr. 4376).

97. *Proiezione, col metodo delle luci ed ombre, della sezione di un cilindro a vapore* (Modello in legno).

a) Schattenconstruction, Fig. 34 Dampfcylinder - Durchschnitt, Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Comp., Bensheim (Hessen), [Taf. ..].

b) ([Inventario 1944] nr. 4376).

98. *Proiezione, col metodo delle luci ed ombre, di due cilindri circolari retti, l'uno diritto, l'altro appoggiato* (Modello in legno).

a) Schattenconstruction, [..], Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Comp., Bensheim (Hessen), Taf. [..].

b) ([Inventario 1944] nr. 4376).

99. *Proiezione, col metodo delle luci ed ombre, di un giunto* (Modello in legno).

a) Schattenconstruction, [..], Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Comp., Bensheim (Hessen), Taf. [..].

b) ([Inventario 1944] nr. 4376).

100. *Proiezione, col metodo delle luci ed ombre, di un pilastro* (Modello in legno).

a) [Schattenconstruction, [..] Gesturzte Kar[..]s Eussgesinis, Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Comp., Bensheim (Hessen), Taf. [..]].

b) ([Inventario 1944] nr. 4376).

101. *Proiezione, col metodo delle luci ed ombre, del capitello di un pilastro* (Modello in legno).

a) [Schattenconstruction, Fig. 20 Karnisigesinis, Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Comp., Bensheim (Hessen), Taf. [..]].

b) ([Inventario 1944] nr. 4376).

102. *Proiezione, col metodo delle luci ed ombre, della base e del capitello di una colonna* (Modello in legno).

a) [Schattenconstruction, [..], Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Comp., Bensheim (Hessen), Taf. [..]].

b) ([Inventario 1944] nr. 4376).

103. *Compenetrazione di solidi per sfaldamento: prisma a base pentagonale con piramide a base triangolare* (Modello in cartone, parzialmente ricostruito).

a) [Durchdringung eines fünfseitigen Prismas und einer dreiseltigen Pyramide, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 26. Serie, Nr. 13] ([Schilling 1911]; 270).

b) ([Inventario 1944] nr. 4379).

104. *Ellisse cubica sghemba su un cilindro ellittico* (Modello in celluloide).

a) [Die cubische Ellipse, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 28. Serie, Nr. 1] ([Schilling 1911]; 152; Ludwig).

b) [Del Re 1906] nr. 52; ([Inventario 1944] nr. 4351 e 4352).

Questo modello coincide con quello descritto in 105.

105. *Ellisse cubica sghemba su un cilindro ellittico* (Modello in celluloide).

a) [Die cubische Ellipse, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 28. Serie, Nr. 1] ([Schilling 1911]; 152; Ludwig).

b) [Del Re 1906] nr. 52; ([Inventario 1944] nr. 4351 e 4352).

Questo modello coincide con quello descritto in 104.

106. *Iperbole cubica sghemba tracciata su di un cilindro iperbolico* (Modello in celluloide).

a) [Die cubische Hyperbel, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 28. Serie, Nr. 2] ([Schilling 1911]; 153; Ludwig).

b) [Del Re 1906] nr. 52; ([Inventario 1944] nr. 4351 e 4352).

107. *Iperbole parabolica cubica su un cilindro parabolico* (Modello originariamente in celluloide, ricostruito in cartone).

a) Die cubische parabolische Hyperbel, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 28. Serie, Nr. 3. ([Schilling 1911]; 154; Ludwig).

b) [Del Re 1906] nr. 52; ([Inventario 1944] nr. 4351 e 4352).

108. *Strumento per la verifica di una proprietà delle Ipocicloidi* (Modello in legno e metallo).

a) Société Genèvoise pour la construction d'instruments de physique, Genève.

b) [R.Sc.Politecnica 1911]; ([Inventario 1944] nr. 4368 e 4369 (?)).

Si tratta di uno strumento in grado di descrivere un segmento di retta.

109. *Integrafo* (Modello in metallo, incompleto).

a) Società fabbricazione apparati e materiali elettrici, Napoli.

b) [R.Sc.Politecnica 1911]; [Pascal 1914]; [Mathesis 1921] nr. 22÷24; [Marcolongo 1935]; ([Inventario 1944] nr. 4382÷4386).

Si tratta di uno degli integrafi ideati da E. Pascal.

110. *Integrafo* (Modello in metallo, frammento).

a) [Società fabbricazione apparati e materiali elettrici, Napoli] (?).

b) [R.Sc.Politecnica 1911]; [Pascal 1914]; [Mathesis 1921] nr. 22÷24; [Marcolongo 1935]; ([Inventario 1944] nr. 4382÷4386).

Si tratta di uno degli integrafi ideati da E. Pascal.

111. *Modello cinematico per il tracciamento meccanico di Epi- e Ipocicloidi* (Modello in metallo e vetro).

a) Cycloidenverzahnung als Anwendung der Methode der Hilfspolbahnen, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 31. Serie, Nr. 5. ([Schilling 1911]; 340).

b) [R.Sc.Politecnica 1911]; [Mathesis 1921] nr. 19; [Marcolongo 1935]; ([Inventario 1944] nr. 4356).

112. *Modello cinematico per il tracciamento meccanico di evolventi* (Modello in metallo e vetro).

a) Methode der secundaren Polbahnen, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 31. Serie, Nr. 9. ([Schilling 1911]; 344).

b) [R.Sc.Politecnica 1911]; [Mathesis 1921] nr. 19; [Marcolongo 1935]; ([Inventario 1944] nr. 4356).

113. *Modello cinematico per il tracciamento meccanico di evolventi* (Modello in metallo e vetro, incompleto, non restaurato).

a) Erzeugung der Kreisevolventen des Modelles 9 nach der Methode der Hilfspolbahnen, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 31. Serie, Nr. 11. ([Schilling 1911]; 346).

b) [R.Sc.Politecnica 1911]; [Mathesis 1921] nr. 19; [Marcolongo 1935]; ([Inventario 1944] nr. 4356).

114. *Ellissografo (o compasso ellittico)* (Modello in ottone).

a) [Ellipsenzirkel nach Rohn, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 32. Serie, Nr. 1] ([Schilling 1911]; 276).

b) [Mathesis 1921] nr. 11; [Marcolongo 1935]; ([Inventario 1944] nr. 4366 (?)).

115. *Modello cinematico per il tracciamento meccanico dell' Ipotrocoide* (Modello in metallo e vetro, frammento).

a) [Erzeugung der Hypotrochoiden als solche mit freien Centrum, Verl. v. Martin Schilling, Halle a.S., 24. Serie, Nr. 3] ([Schilling 1911]; 331).

b) [Cesàro 1906] lettera a Schilling; [R.Sc.Politecnica 1911]; [Mathesis 1921] nr. 19; [Marcolongo 1935]; ([Inventario 1944] nr. 4356).

116. *Frammento* (Modello in legno).

a) [Darstellende Geometrie], constr. u. lith. v. J.Schröder, [Darmstadt, Abth:I, Taf: 2 o Abth:II, Taf. 26].

b) ([Inventario 1944] nr. 4377 o 4378).

117. *Frammento* (Modello in legno).

a) [Darstellende Geometrie, constr. u. lith. v. J.Schöder, Darmstadt, Abth: II, Taf: 26] (?).

b) ([Inventario 1944] nr. 4377 o 4378) (?).

118. *Frammento* (Modello in legno).

a) [Schatten]construction, Fig. 18 [..] stab Kernkörser desselben, [Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Comp., Bensheim (Hessen), Taf. ..].

b) ([Inventario 1944] nr. 4376).

119. *Frammento: base in legno con sostegno in ottone* (Modello in legno e ottone).

## 3. CATALOGO DEI MODELLI E STRUMENTI PER COSTRUTTORI

### 3.1. Criteri di Catalogazione.

Nel catalogo per costruttori vengono raggruppati i modelli secondo le ditte costruttrici.

Le ditte costruttrici sono elencate in ordine alfabetico; seguono dove presenti le serie e i numeri delle serie; ad ogni numero viene fatto seguire tra parentesi tonde il numero di posizione del modello nel catalogo generale.

I modelli dovuti a Brill e a Schilling vengono dati secondo le serie come presenti nel catalogo Schilling del 1911. Di ogni serie viene dato il titolo in tedesco e, tra parentesi, vengono segnalati, laddove noti, gli ideatori della serie (o di gruppi di modelli della serie) e l'anno (o gli anni) di pubblicazione.

Va osservato esplicitamente che la serie IX riprende dei modelli preparati, qualche anno prima dell'inizio della produzione di Brill, da Kummer (e messi a disposizione da Weierstrass). Tale indicazione è data tra parentesi quadra.

In appendice viene data la distinzione tra i modelli dovuti a Brill e quelli dovuti a Schilling: alla serie e al numero di serie viene fatto seguire, tra parentesi tonda, il numero di posizione del modello nel catalogo generale.

Anche qui il punto interrogativo tra parentesi tonde indica dubbio grave.

Va osservato infine che alcuni modelli costruiti da studenti della Facoltà di Matematica non sono stati inseriti nel catalogo.

### 3.2. Catalogo per costruttori

*G. Cussons, Ltd* (Lower Broughton, Manchester) [Cussons]

Serie 3582: Models of penetration.

Nr.: 4 (73), 6 (74), 11 (75), 13 (76), 15 (77).

*J. Ehrard e C.* (Bensheim, Hessen)

Schattenconstruction Lehrmittelanstalt

Taf.: 9 (119), 20 (98), 24 (99 ?), 26 (94), (95), (96), (97), (100), (101), (102), (118).

*M. Schilling* (Halle a.S.) [Schilling 1911]

Serie I: Gipsmodelle nach Originalen des mathematischen Instituts der kgl. Technischen Hochschule München (I. Folge). (A. Brill, 1877)

Nr.: 1 (1), 3b (2), 5 (3).

Serie II: Gipsmodelle nach Originalen der. Techn. Hochschule München (2. Folge). (Klein 1-2, Brill 3-6, 1877)

Nr.: 1b (4), 1c (5), 3b (6), 3d (7), 4 (8), 5 (9).

Serie V: Gipsmodelle nach Originalen der. Techn. Hochschule München (3. Folge). (Brill 1880)

Nr.: 1 (10).

Serie VI: Modelle von Wellenflächen und eines Kreiskegels, sowie Gipsmodelle nach Originalen der. Techn. Hochschule München (4. Folge). (Klein 6, 1880)

Nr.: 1 (11), 2 (12 e 13), 4 (14).

Serie VII: Gipsmodelle von Flächen 3. Ordnung nach Rodenberg. (Rodenberg 1881)

Nr.: 1 (15), 2 (16), 4 (17), 6 (18), 9 (19), 13 (20), 14 (21), 17 (22), 18 (23), 19 (24), 21 (25), 24a (26), 25 (27).

Serie VIII: Gipsmodelle nach Originalen der. Techn. Hochschule München (5. Folge). (Brill 1882)

Nr.: 2 (28), 3 (29), 4 (30), 6a (31), 6c (32), 7c (33).

Serie IX: Gipsmodelle von Flächen 4. Ordnung nach Kummer. ([Kummer 1862, 1866, 1872], 1883)

Nr.: 9 (34).

Serie X: Gips-, Draht- und Messingblechmodelle, zum grössten Teil nach Originalen der. techn. Hochschule München (6. Folge). (1885)

Nr.: 3 (35), 4 (36), 5 (37), 7 (38), 8b (39), 10d (40), 10e (41), 10k (42), 10l (43), 10m (44), 11a (45), 11b (46), 12a (47), 12b (48), 12c (49), 13 (50).

Serie XI: Drahtmodelle über die Projectionen einer unebenen Curve nach Chr. Wiener. (Chr. Wiener 1884)

Nr.: 1 (69), 8 (68).

Serie XIV: Modelle zur Functionentheorie nach Dyck, Abgüsse nach Originalen der. techn. Hochschule München (7. Folge). (Dyck 1886)

Nr.: 1a (51), 1b (52), 2a (53), 3 (54).

Serie XVI: Confocale Flächen 3. Grades nach Neovius und Schwarz. (Neovius 1-3; Schwarz 4-9 1888)

Nr.: 9 (55).

Serie XVII: Gipsmodelle verschiedener Art, zum Teil nach Originalen der. techn. Hochschule München (8. Folge). (Neovius 1,3; Brill 2; Dyck 5-7; Klein 8, 9; 1886; 1888; 1891; 1898)

Nr.: 8a (56), 8b (57), 9a (58), 9b (59), 9c (60), 10 (61); 12 (62).

Serie XXIV: Kinematische Modelle nach Fr. Schilling. (Fr. Schilling 1898)

Nr.: 3 (114).

Serie XXVI: Modelle für darstellende u. projective Geometrie. (Hauck 1-10; Fr. Schilling 11-23; 1901, 1909)

Nr.: 13 (103).

Serie XXVIII: Modelle d. Raumcurven 3. Ordnung nach Ludwig. (Klein 1902)

Nr.: 1 (104 e 105), 2 (106), 3 (107).

Serie XXX: Gipsmodelle verschiedener Art. (Hilbert 1,2; Stäckel 3; Zindler 4; Finsterwalder e Vass 5; Darboux 6-7; Sommer 8; 1903, 1905, 1909, 1910)

Nr.: 1 (63), 2 (64).

Serie XXXI: Zweite Sammlung kinematischer Modelle, insbesondere für Verzahnungstheorie nach F.Schilling. (F. Schilling 1905)

Nr.: 5 (111), 9 (112), 11 (113).

Serie XXXII: Verschiedene Modelle. (rohn 1; Kötter 2; Hildebrandt 3; Gaetschenberger 4-5; Königs 6; 1906, 1908)

Nr.: 1 (115), 2 (72).

*J. Schröder* (Darmstadt) [Schröder]

Darstellende Geometrie

Abth I

Taf.: 2 (?) (116), 11 (91).

Abth II

Taf.: 26 (?) (117), 27 (92), 34 (93).

*Società fabbricazione apparati e materiali elettrici* (Napoli)

(109), (110).

*Société Genèvoise pour la construction d'instruments de physique* (Genève)

(108)

### 3.3. Appendice

*L. Brill*

Serie I: 4 (1), 5 (3), 6(2).

Serie II: 6b (4), 6c (5), 7 (16), 8b (6), 8d (7), 9 (8), 10 (9).

Serie VII: 4 (17), 5 o 8 o 12 o 13 (18), 6 (19), 7 (20), 14 (21), 15 (15), 17 (22), 18 (23), 19 (24), 21 (25), 24a (26), 25 (27).

Serie VIII: 21 (28), 23 (30), 25c (32), 26 (29) (?), 27 (33).

Serie IX: 9 (34).

*M. Schilling* (a. Halle)

Serie V: 1 (10).

Serie VI: 1 (11), 2 (12, 13), 4 (14).

Serie VIII: 6a (31)

Serie X: 3 (35), 4 (36), 5 (37), 7 (38), 8b (39), 10d (40), 10e (41), 10k (42), 10l (43), 10m (44), 11a (45), 11b (46), 12a (47), 12b (48), 12c (49), 13 (50).

Serie XI: 1 (69), 8 (68).

Serie XIV: 1a (51), 1b (52), 2a (53), 3 (54).

Serie XVI: 9 (55).

Serie XVII: 8a (56), 8b (57), 9a (58), 9b (59), 9c (60), 10 (61), 12 (62).

Serie XXIV: 3 (114).

Serie XXVI: 13 (103).

Serie XXVIII: 1 (104, 105), 2 (106), 3 (107).

Serie XXX: 1 (63), 2 (64).

Serie XXXI: 5 (111), 9 (112) 11 (113).

Serie XXXII: 1 (115), 2 (72).

## 4. CATALOGO DEI MODELLI E STRUMENTI PER ARGOMENTO

### 4.1. Criteri di catalogazione

Anche nel catalogare gli strumenti e i modelli per argomento si è preferito utilizzare un sistema d'epoca, scegliendo quello dato da Schilling nel suo catalogo del 1911.

È stato però necessario apportare qualche lieve modifica in quanto il sistema risente del fatto che il catalogo non è particolarmente ricco nel settore della Geometria proiettiva e descrittiva, e manca di strumenti di calcolo.

Si è suddivisa perciò la voce a) del titolo VIII in cinque sottovoci $a_1$), $a_2$), $a_3$), $a_4$), $a_5$) e si è aggiunto un titolo XV.

Sono stati approntati così due cataloghi: nel primo ad ogni argomento sono stati associati i modelli e strumenti ad esso relativi, nel secondo ad ogni strumento o modello sono stati associati gli argomenti ad esso pertinenti.

Nel primo catalogo ad ogni voce (o sottovoce) seguono i numeri dei modelli corrispondenti a quella voce (o sottovoce) nel catalogo generale.

L'ordine seguito nel dare i numeri dei modelli è consistito nel premettere i modelli presenti nel catalogo dello Schilling, elencati secondo la loro posizione nella sezione per contenuto del catalogo Schilling (tale posizione segue quella nel catalogo generale e viene riportata tra parentesi) e nel fare seguire poi gli altri modelli elencati secondo la loro posizione nel catalogo generale.

A tali altri modelli segue anche, tra parentesi, l'indicazione del costruttore laddove noto secondo la seguente tabella di corrispondenza

C = Cussons

E = Ehrard

Sc = Schröder

SG = Société Genèvoise pour la construction d'instruments de physique

SN = Società fabbricazione apparati e materiali elettrici

Nel secondo catalogo al numero d'ordine nel catalogo generale seguono il titolo, la voce, la sottovoce relative all'argomento come descritto nel primo catalogo.

Anche in tali cataloghi il punto interrogativo indica incertezza grave.

### 4.2. Catalogo argomento - modelli

I. Superficie del secondo ordine

a) Ellissoide: 50 (4), 35 (5), 3 (214).

b) Iperboloide

c) Paraboloide

d) Sfera, cono, cilindro.

II Superficie algebriche del terzo ordine

a) Superficie del terzo ordine non rigate: 15 (44), 16 (45), 17 (47), 24 (48), 18 (49), 19 (52), 20 (56), 21 (57), 23 (61), 22 (60), 26 (64), 27 (66).

b) Superficie rigate del terzo ordine, in particolare coni: 25 (68).

III. Superficie algebriche del quarto ordine

a) Ciclidi: 37 (91), 39 (93).

b) Superficie di Kummer: 4 (96), 5 (97).

c) Superficie del quarto ordine con 4 piani che le toccano lungo cerchi: 34 (104), 36 (105).

d) Superficie del quarto ordine con rette doppie: 36 (105).

e) Superficie del quarto ordine rigate: 70.

IV. Superficie algebriche di ordine superiore al quarto. Geometria di linea: 29 (117), 2 (123), 40 (199), 42 (202), 28 (246), 51 (307), 52 (307), 53 (308).

V. Superficie ad elica: 33 (234).

VI. Superficie sviluppabili e curve nello spazio

68 (141), 69 (134), 106 (153), 107 (154), 104, 105 (152).

VII. Geometria infinitesimale delle Superficie

a) Curvatura delle superficie in un punto singolo

b) Linee di curvatura, in particolare su superficie del secondo ordine: superficie confocali: 55 (185), 45 (194), 46 (195), 37 (91), 39 (93), 31 (245).

c) Curve asintotiche e curve paraboliche: 40 (199), 41 (201), 42 (202), 43 (206), 44 (207), 8 (228), 1 (230), 31 (245), 28 (246).

d) Linee geodetiche su superficie del secondo ordine: 3 (214), 49 (216), 48 (218), 47 (219), 8 (228), 9 (229), 1 (230), 6 (240), 7 (242), 32 (243).

e) Superficie di curvatura totale costante e superficie applicabili l'una sull'altra: 8 (228), 9 (229), 1 (230), 33 (234), 31 (245).

f) Superficie di curvatura media costante. Superficie minime: 6 (240), 7 (242), 32 (243), 31 (245), 28 (246).

g) Superficie di larghezza costante

VIII. Geometria descrittiva e proiettiva

a) Ausili per il disegno geometrico, per la generazione proiettiva delle coniche, per la prospettiva in rilievo

$a_1$) Tavole per la Geometria descrittiva: 91 (Sc), 92 (Sc), 93 (Sc), 116 (Sc), 117 (Sc ?).

$a_2$) Compenetrazione tra solidi: 103 (270), 72 (277), 73 (C), 74 (C), 75 (C), 76 (C), 77 (C), 78 (C).

$a_3$) Tavole per proiezioni col metodo delle luci ed ombre: 94 (E), 95 (E), 96 (E), 97 (E), 98 (E), 99 (E), 100 (E), 101 (E), 102 (E), 118 (E)

$a_4$) Solidi elementari: 30 (283), 79 - 90.

$a_5$) Ausili strumentali per la Geometria descrittiva e proiettiva: 114 (276).

b) Proiezioni di corpi quadridimensionali

IX. Topologia: 63 (298), 64 (299).

X. Algebra

XI. Teoria delle funzioni:

61 (303), 62 (305), 51 (307), 52 (307), 53 (308), 54 (309), 10 (317), 67.

XII. Meccanica e Cinematica:

115 (331), 111 (340), 112 (344), 113 (346), 71, 108 (SG).

XIII. Fisica Matematica: 38 (357), 11 (358), 12, 13 (359), 14 (360), 56 (361), 57 (362), 58 (363), 59 (364), 60 (365).

XIV. Struttura dei cristalli

XV. Strumenti di calcolo: 109 (SN), 110 (SN).

### 4.3. Catalogo modelli - argomento

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 VIIc, d,e | 2 IV | 3 Ia,VIId | 4 IIIb | 5 IIIb |
| 6 VIId, f | 7 VIId, f | 8 VIIc, d, e | 9 VIId, e | 10 XI |
| 11 XIII | 12 XIII | 13 XIII | 14 XIII | 15 IIa |
| 16 IIa | 17 IIa | 18 IIa | 19 IIa | 20 IIa |
| 21 IIa | 22 IIa | 23 IIa | 24 IIa | 25 IIb |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 26 IIa | 27 IIa | 28 IV, VIIc, f | 29 IV | 30 VIIIa |
| 31 VIIb, c, e, f | 32 VIId, f | 33 V, VIIe | 34 IIIc | 35 Ia |
| 36 IIIc,d | 37 IIIa, VIIb | 38 XIII | 39 IIIa, VIIb | 40 IV,VIIc |
| 41 VIIc | 42 IV, VIIc | 43 VIIc | 44 VIIc | 45 VIIb |
| 46 VIIb | 47 VIId | 48 VIId | 49 VIId | 50 Ia |
| 51 IV, XI | 52 IV, XI | 53 IV, XI | 54 XI | 55 VIIb |
| 56 XIII | 57 XIII | 58 XIII | 59 XIII | 60 XIII |
| 61 XI | 62 XI | 63 IX | 64 IX | 65 |
| 66 | 67 XI | 68 VI | 69 VI | 70 III |
| 71 XII | 72 VIIIa | 73 $VIIIa_2$ | 74 $VIIIa_2$ | 75 $VIIIa_2$ |
| 76 $VIIIa_2$ | 77 $VIIIa_2$ | 78 $VIIIa_2$ | 79 $VIIIa_4$ | 80 $VIIIa_4$ |
| 81 $VIIIa_4$ | 82 $VIIIa_4$ | 83 $VIIIa_4$ | 84 $VIIIa_4$ | 85 $VIIIa_4$ |
| 86 $VIIIa_4$ | 87 $VIIIa_4$ | 88 $VIIIa_4$ | 89 $VIIIa_4$ | 90 $VIIIa_4$ |
| 91 $VIIIa_1$ | 92 $VIIIa_1$ | 93 $VIIIa_1$ | 94 $VIIIa_3$ | 95 $VIIIa_3$ |
| 96 $VIIIa_3$ | 97 $VIIIa_3$ | 98 $VIIIa_3$ | 99 $VIIIa_3$ | 100 $VIIIa_3$ |
| 101 $VIIIa_3$ | 102 $VIIIa_3$ | 103 VIII $a_2$ | 104 VI | 105 VI |
| 106 VI | 107 VI | 108 XII | 109 XV | 110 XV |
| 111 XII | 112 XII | 113 XII | 114 $VIIIa_5$ | 115 XII |
| 116 $VIIIa_1$ | 117 $VIIIa_1$ | 118 $VIIIa_3$ | 119 | |

## 5. CATALOGO DEI MODELLI E STRUMENTI PER COMMITTENTI

### 5.1. Criteri di catalogazione

L'ordine seguito è quello alfabetico dei committenti; tra parentesi viene inserita, quando è nota, la struttura per la quale avviene la committenza e, come al solito, il punto interrogativo tra parentesi indica un'attribuzione dubbia; al committente seguono i numeri del catalogo generale relativi ai modelli commessi.

Poiché vari committenti acquisirono modelli dello stesso tipo, compare nel catalogo qualche ripetizione ed è impossibile aver la certezza che il modello conservatosi sia stato realmente acquisito dal committente cui è attribuito.

### 5.2. Catalogo per committenti

Caporali, Sannia (?) (Scuola di Geometria descrittiva): 1, 2, 3, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27,.

Cesàro (Gabinetto di Calcolo Infinitesimale): 14, 34, 63, 64, 68, 117.

Del Re (Gabinetto di Geometria descrittiva): 56, 68, 104, 105, 106, 107.

Marcolongo (Gabinetto di Meccanica Razionale): 11, 12, 13, 14, 32, 38, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115.

Montesano (Gabinetto di Geometria Superiore): 36.

## 6. CATALOGO ICONOGRAFICO

Nel presente catalogo iconografico, come segnalato, vengono date le rappresentazioni fotografiche in bianco e nero di tutti i modelli della collezione, eccezion fatta per i frammenti (numeri 115-119 del catalogo generale).

Esse vengono presentate seguendo, naturalmente, l'ordine del catalogo generale e a tale catalogo si riferisce il numero identificativo della singola immagine.

Per qualche specimen di rappresentazione fotografica a colori si rinvia a [Carbone Cardone Palladino 1996].

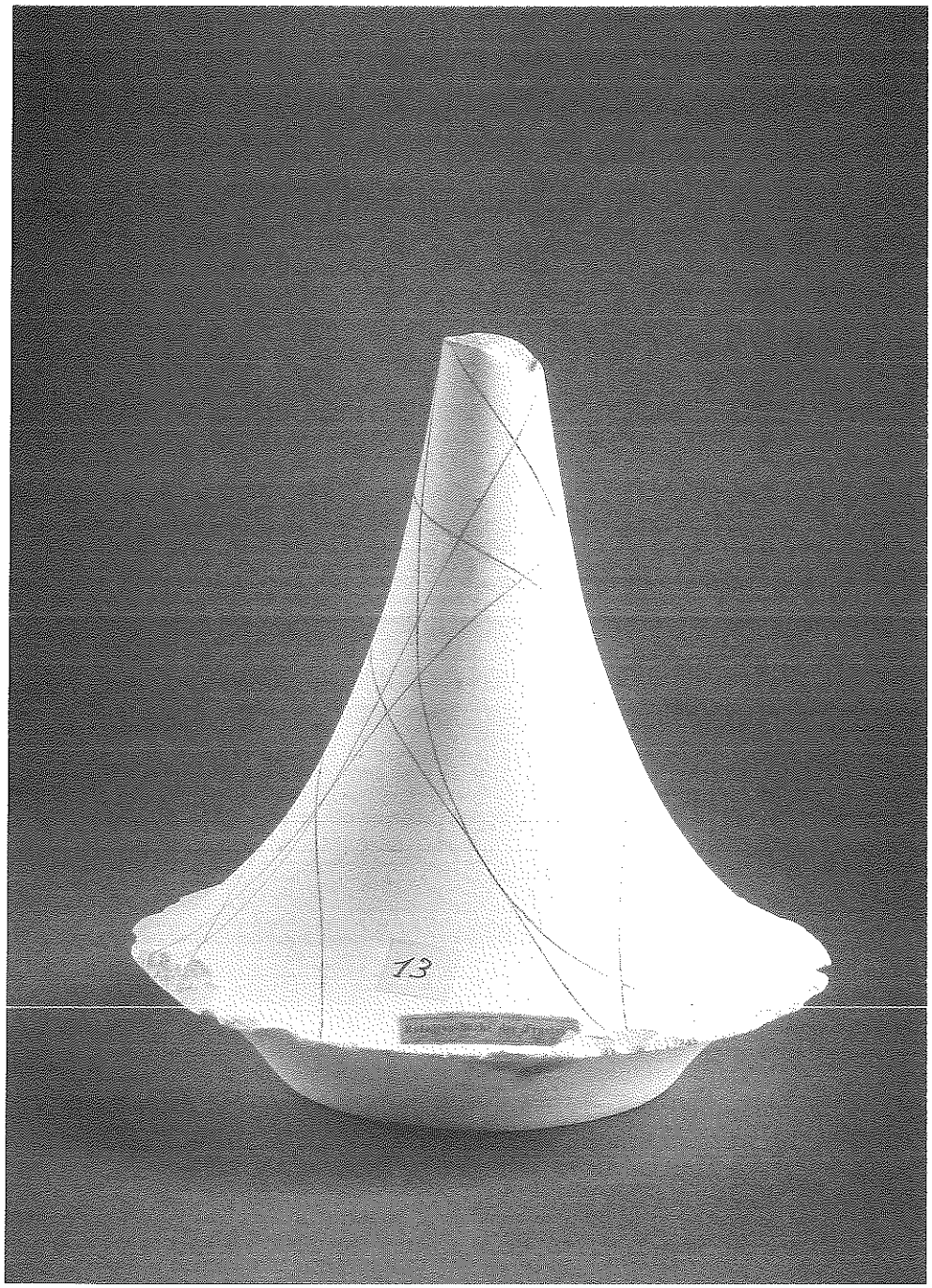


*Figura 1*

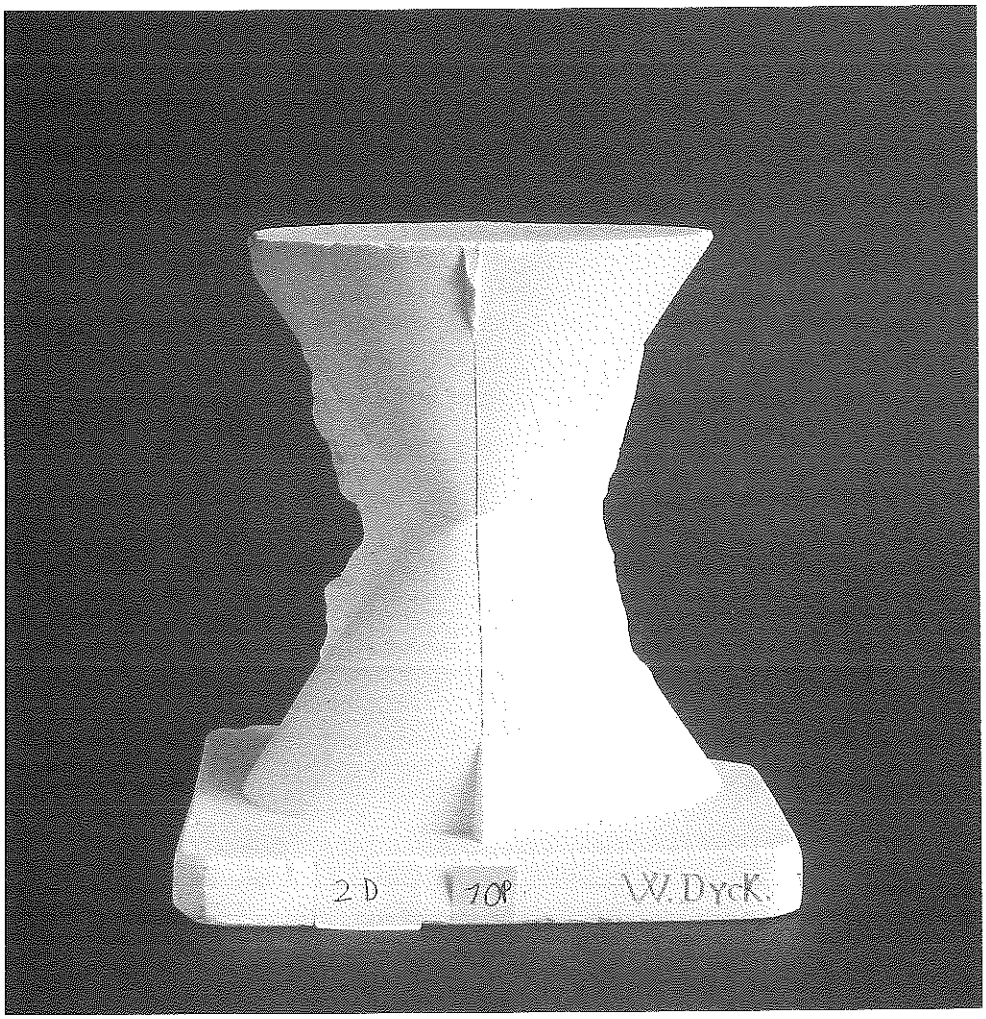


*Figura 2*

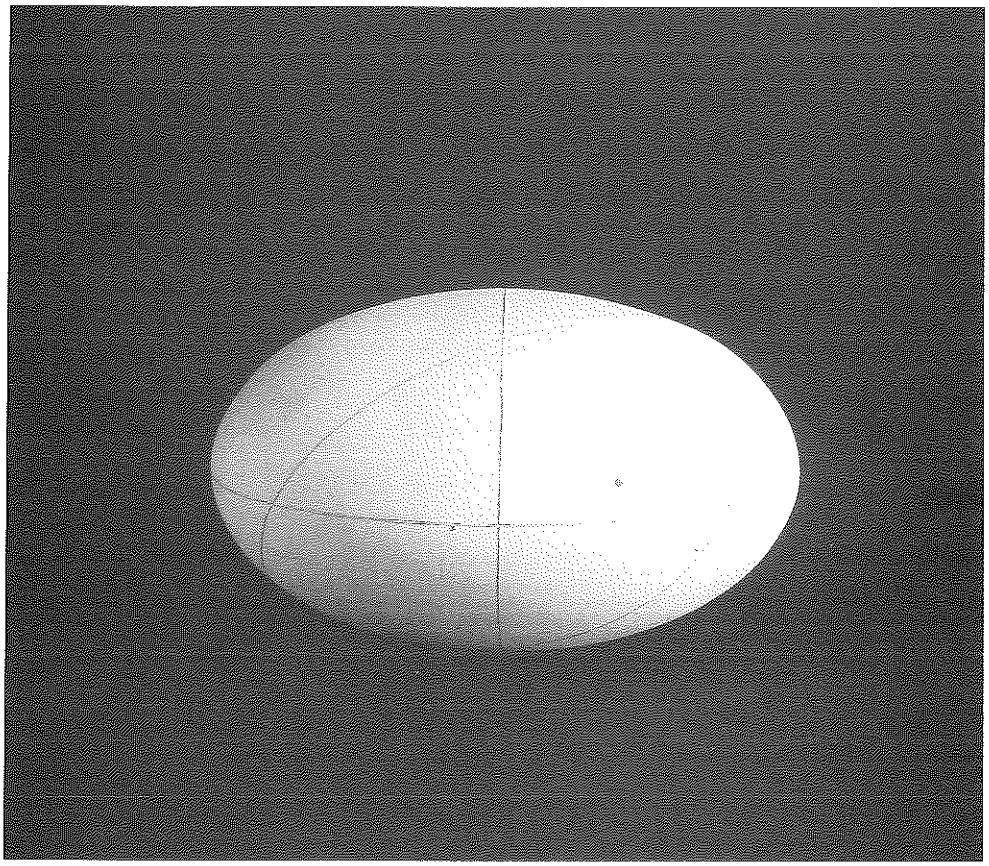

*Figura 3*

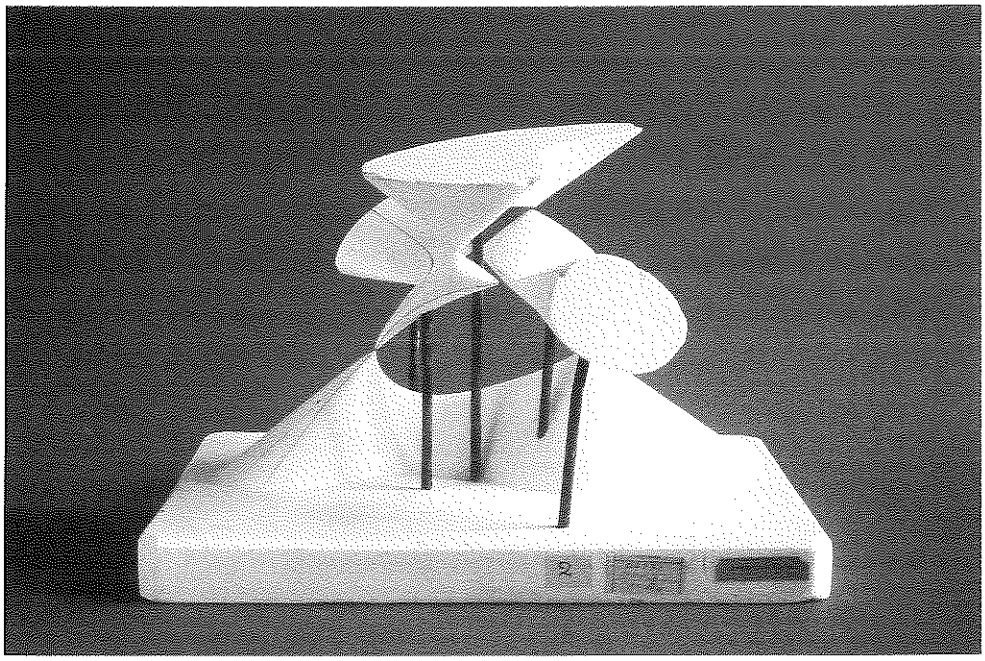

*Figura 4*

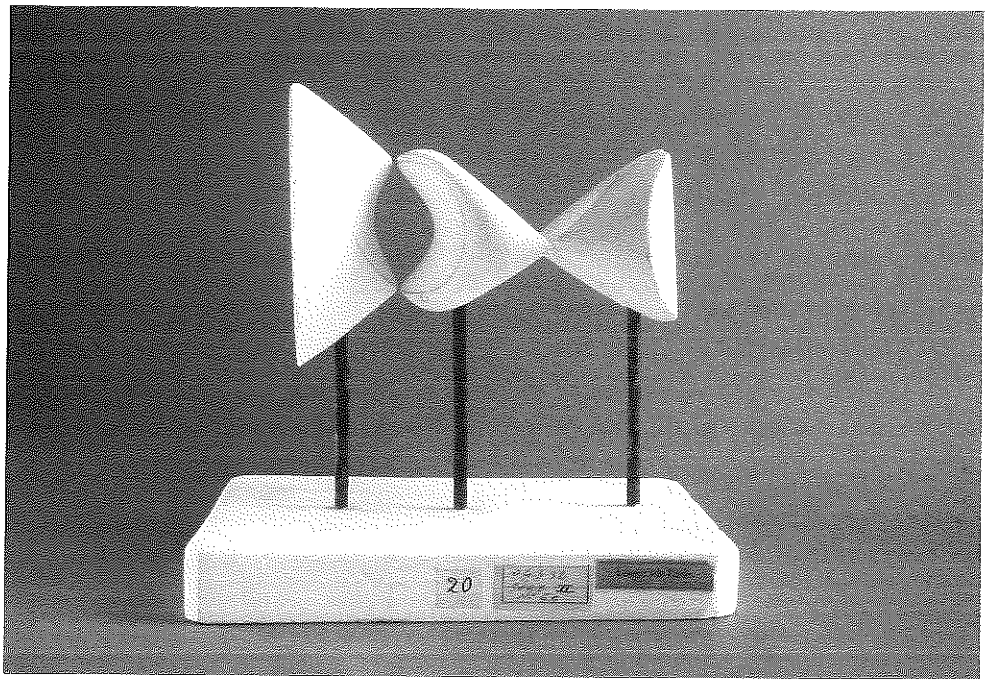


*Figura 5*

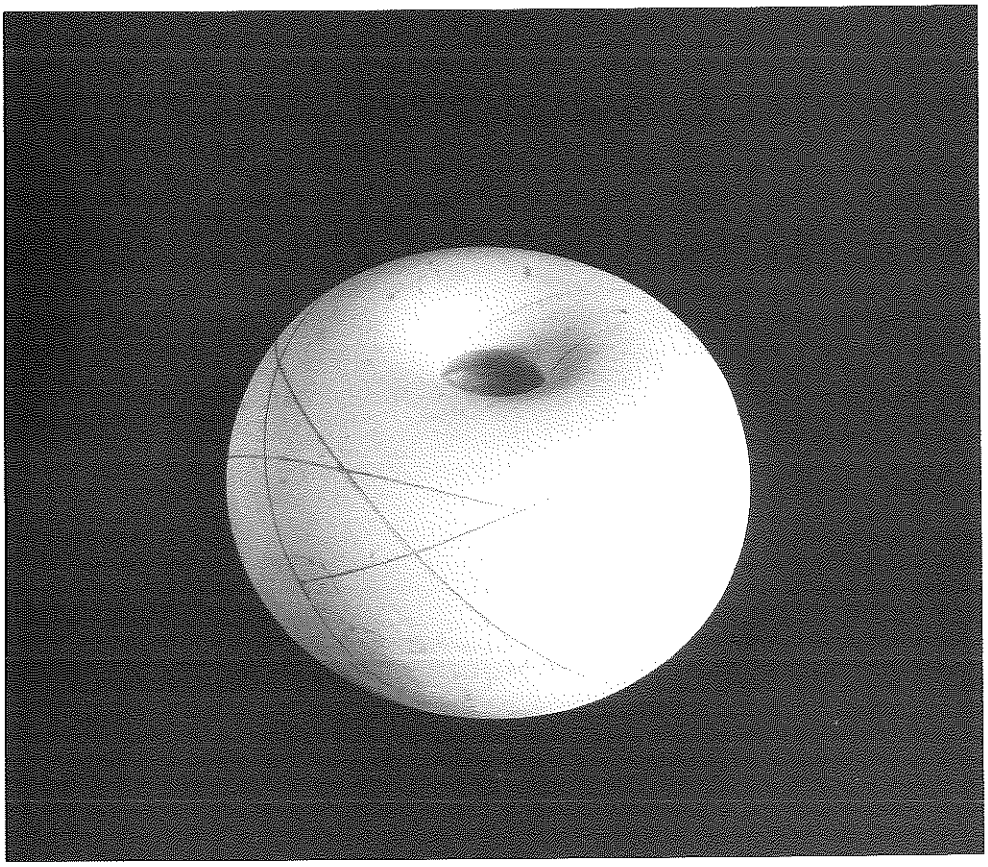

*Figura 6*

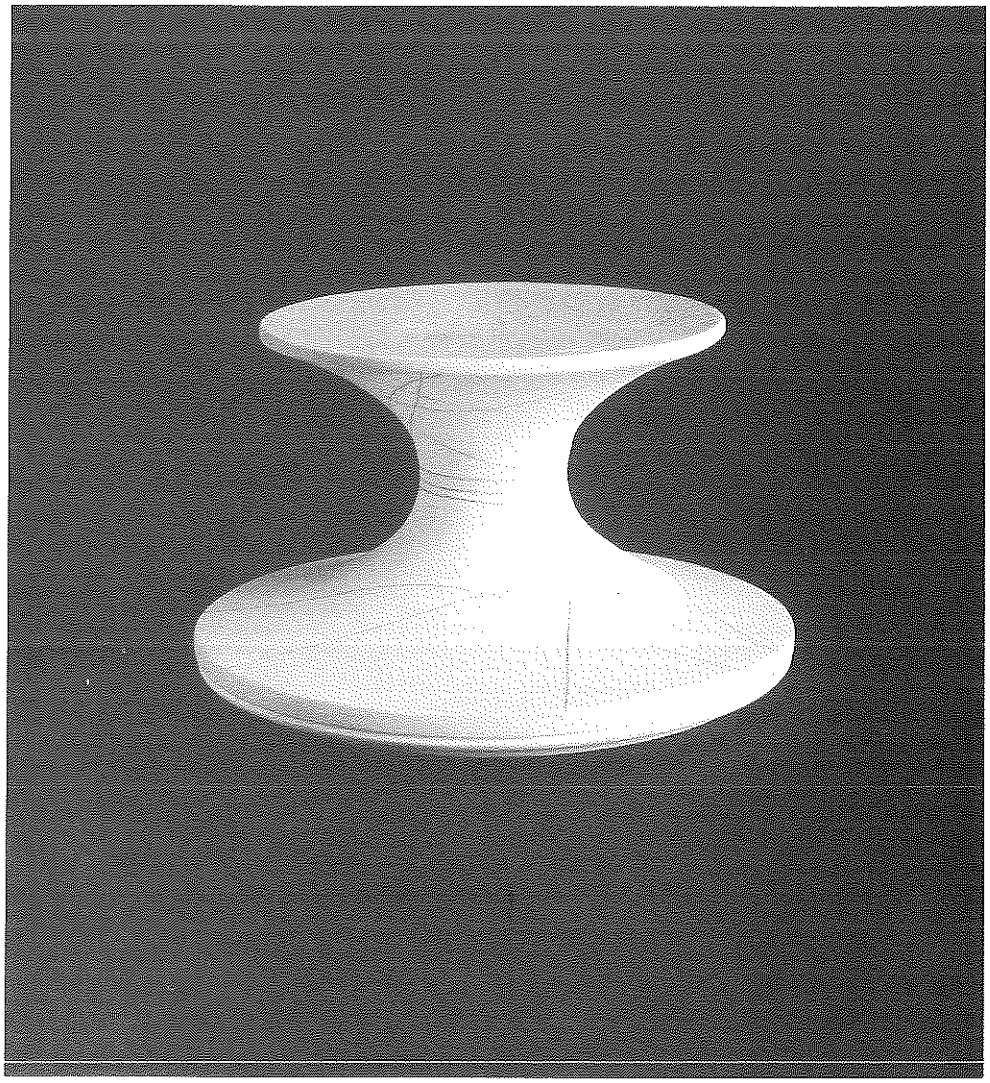

*Figura 7*

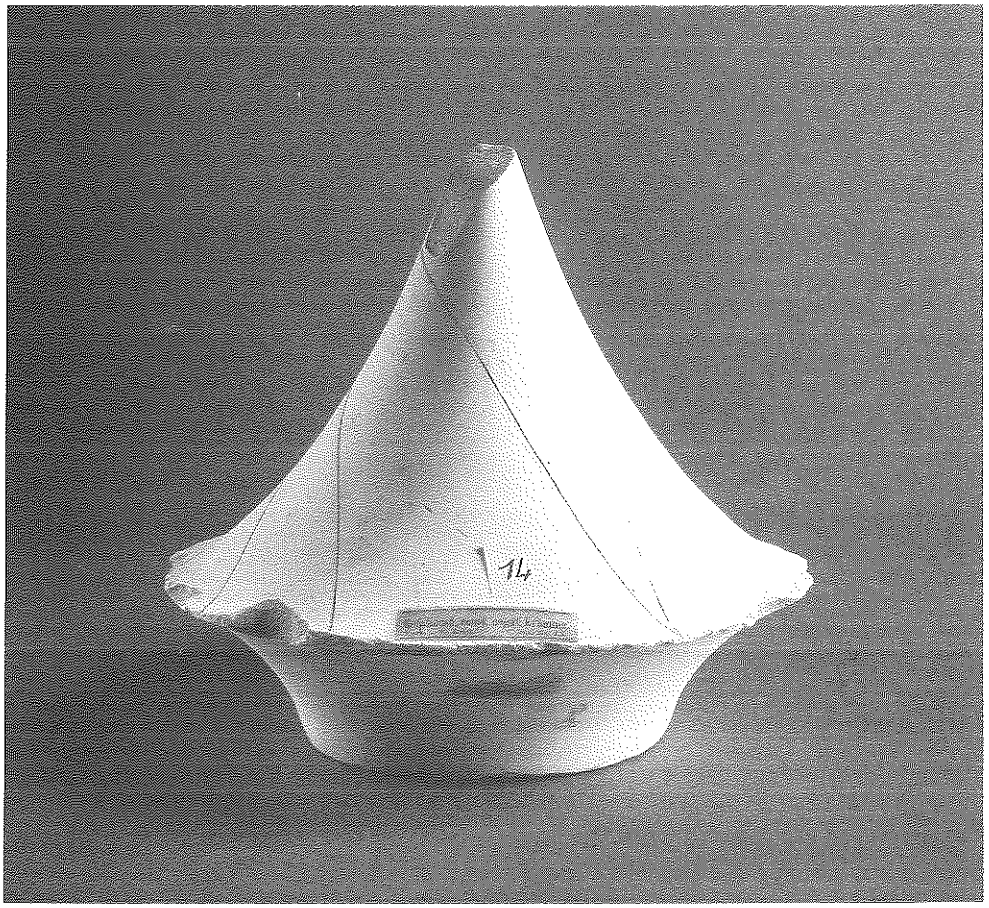

*Figura 8*

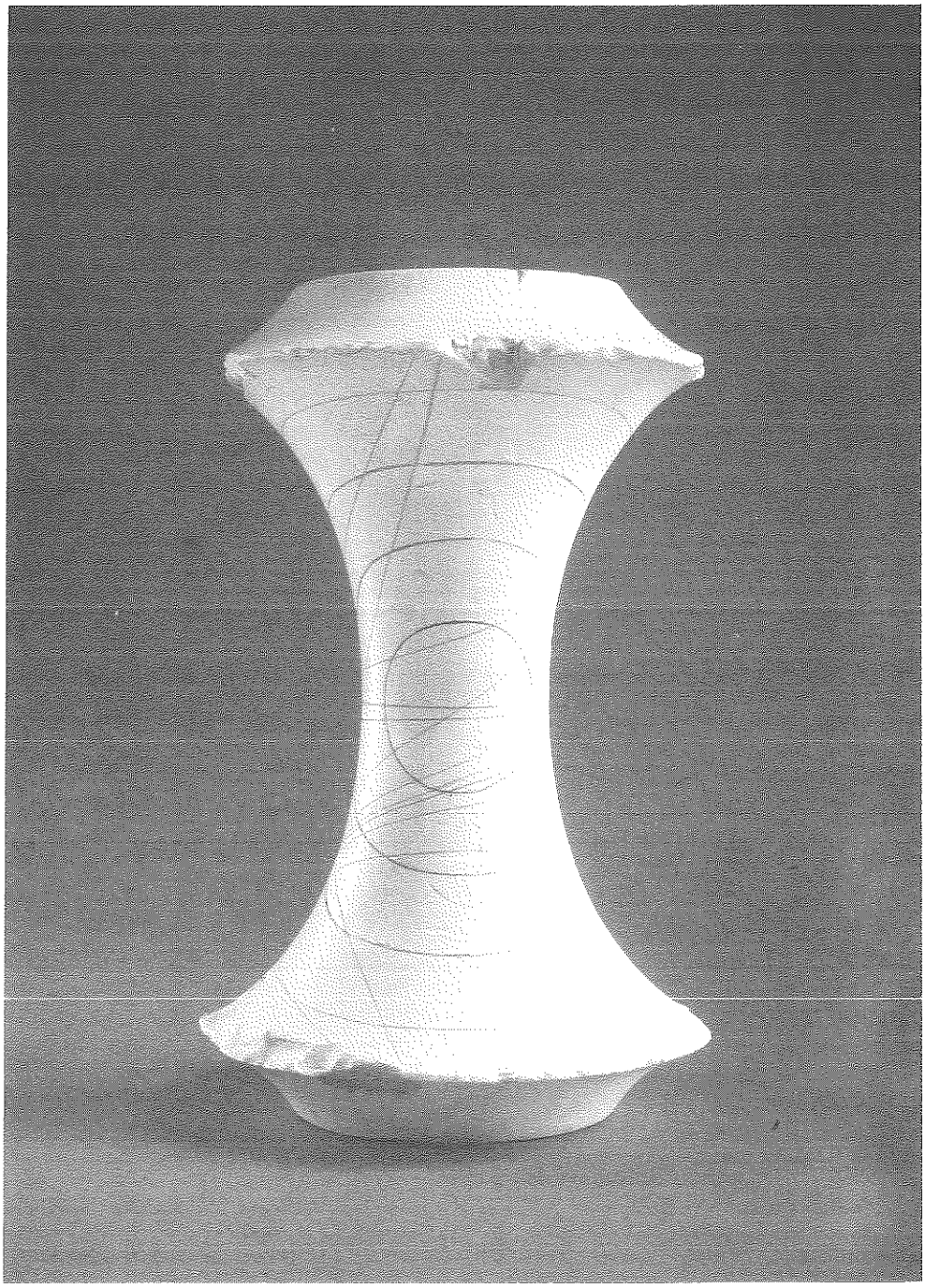

*Figura 9*

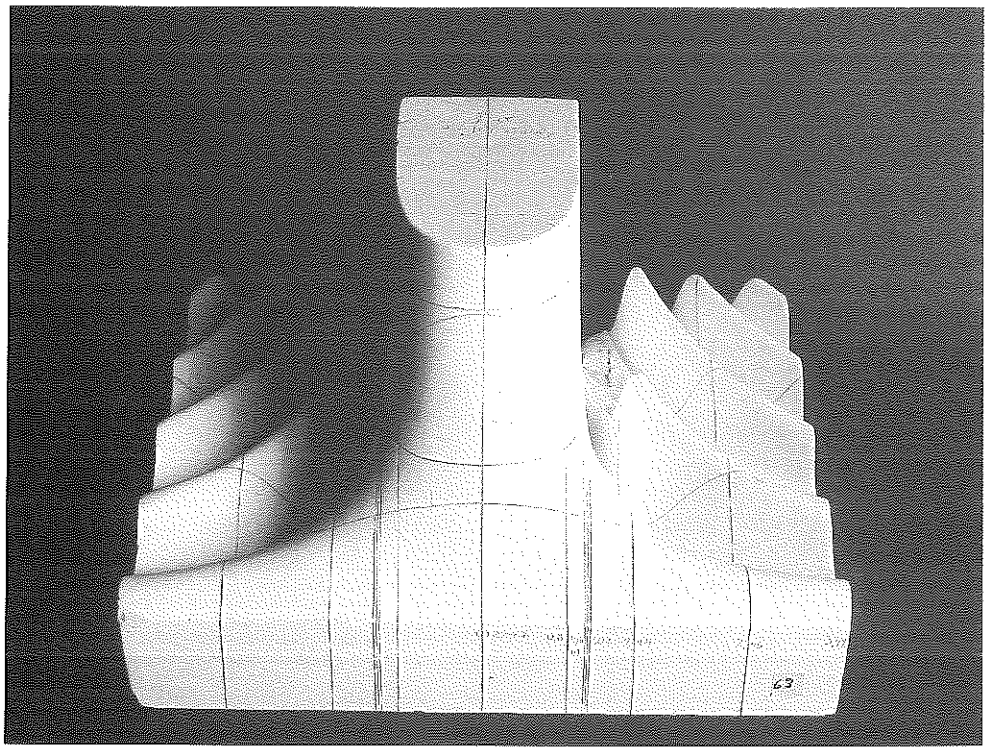

*Figura 10*

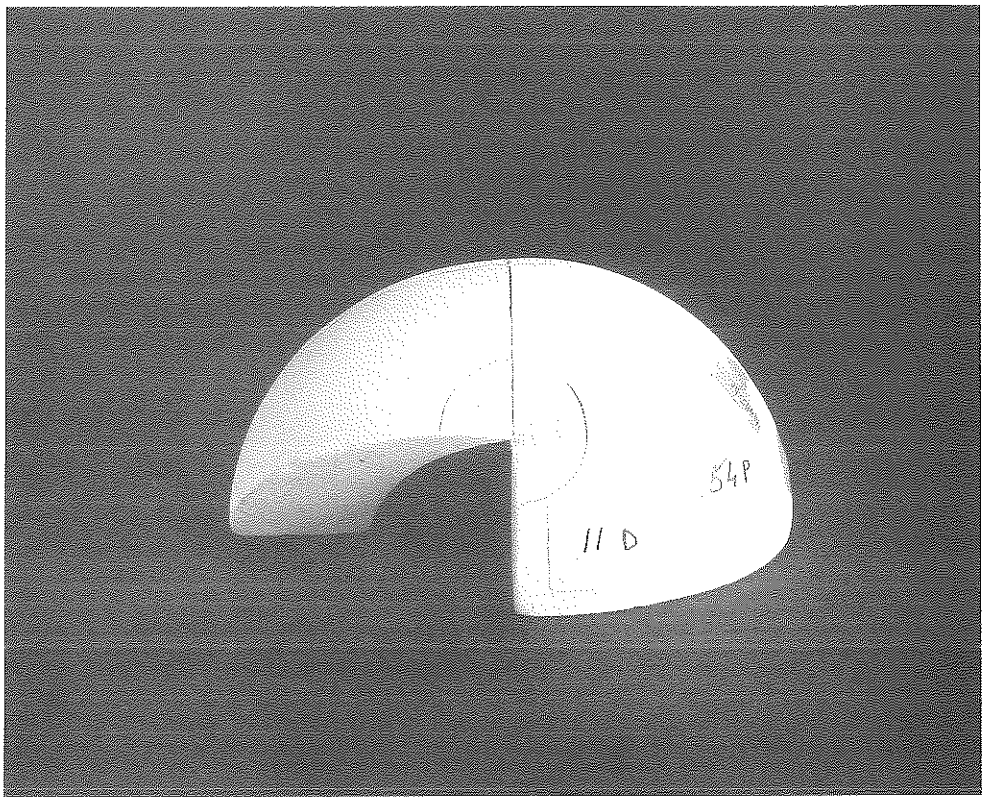


*Figura 11*

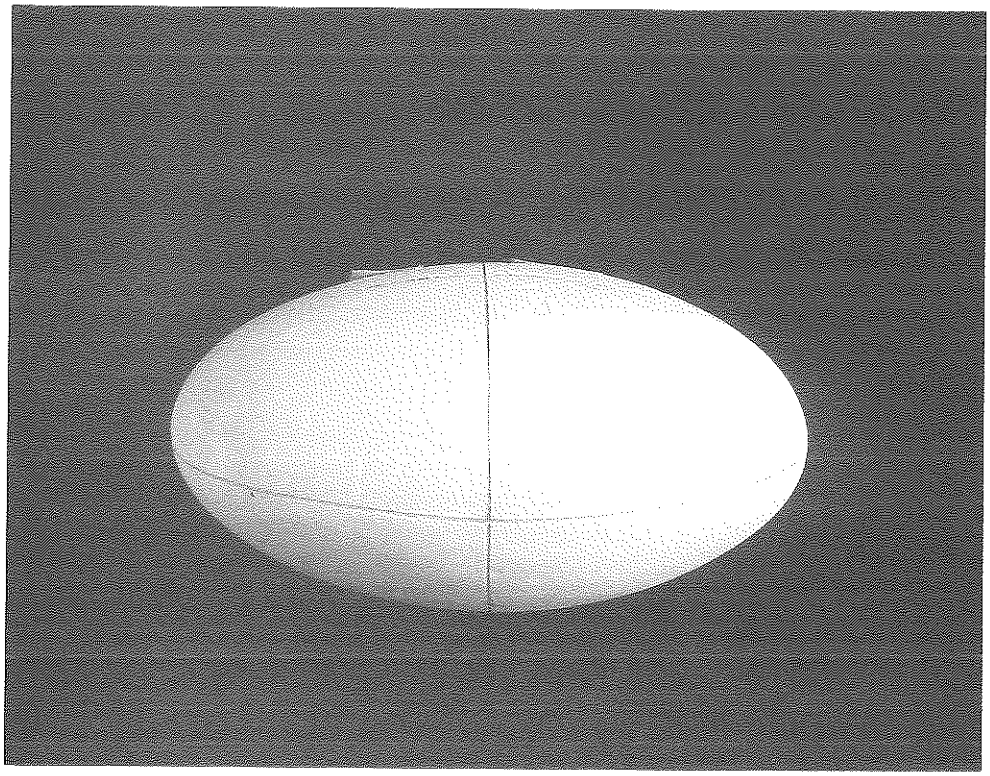

*Figura 12*

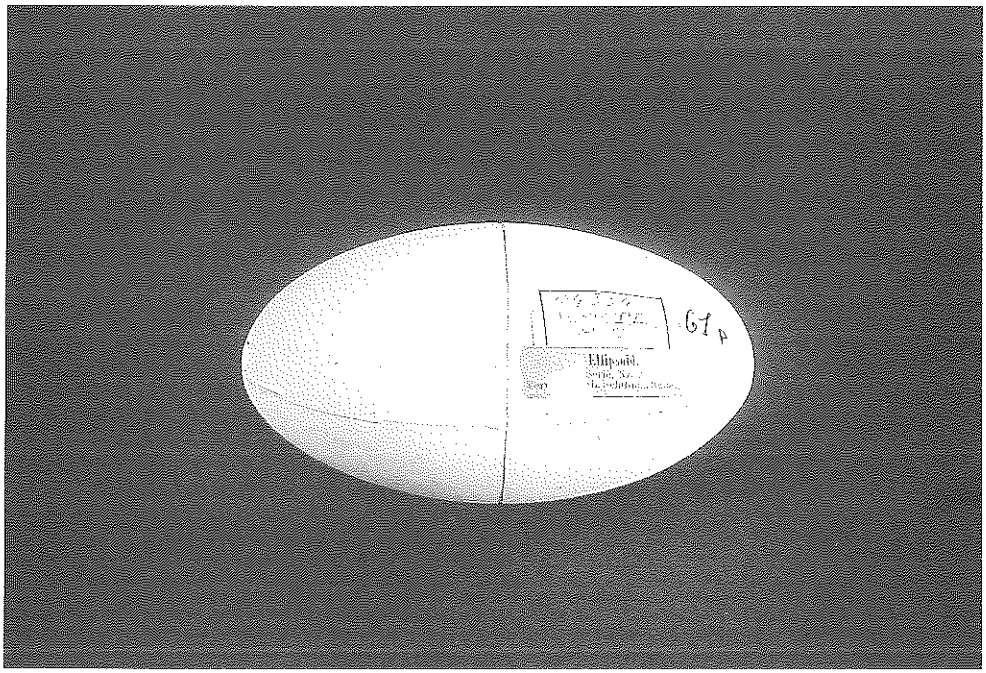


*Figura 13*

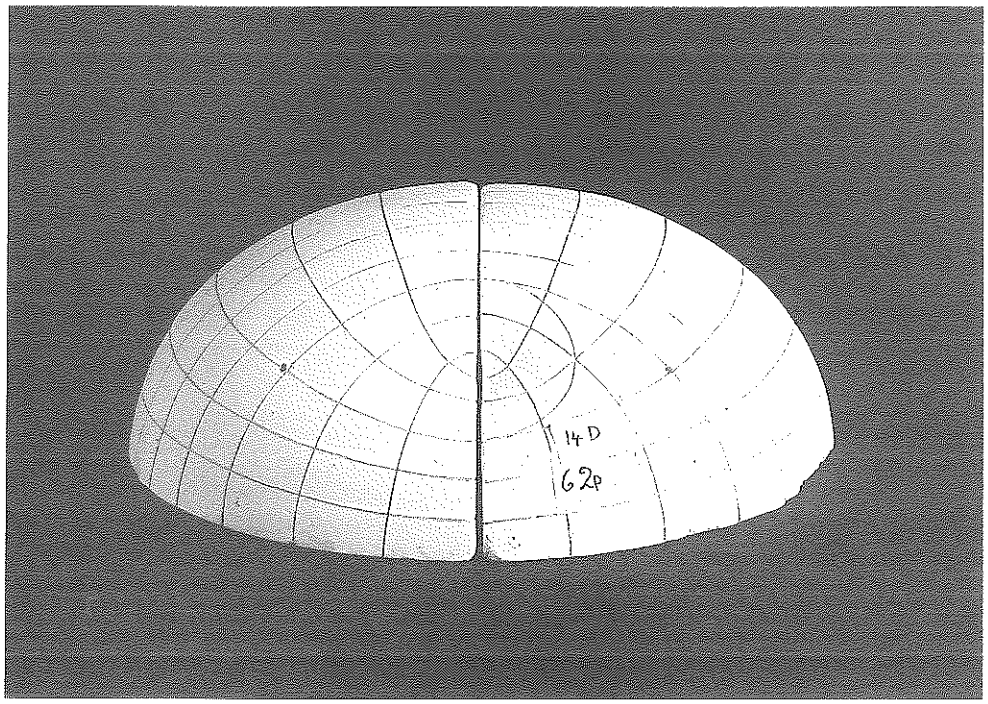


*Figura 14*

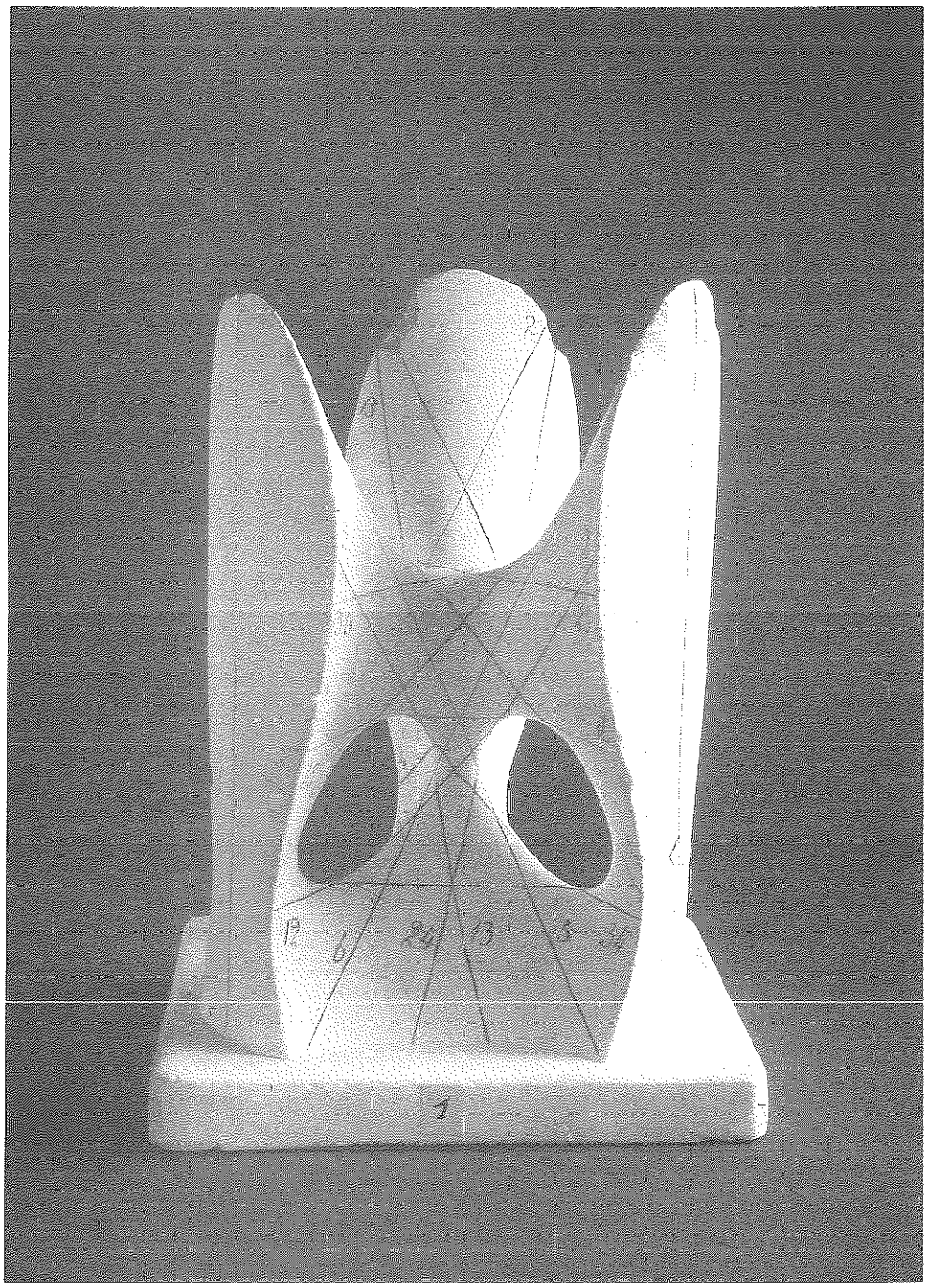

*Figura 15*

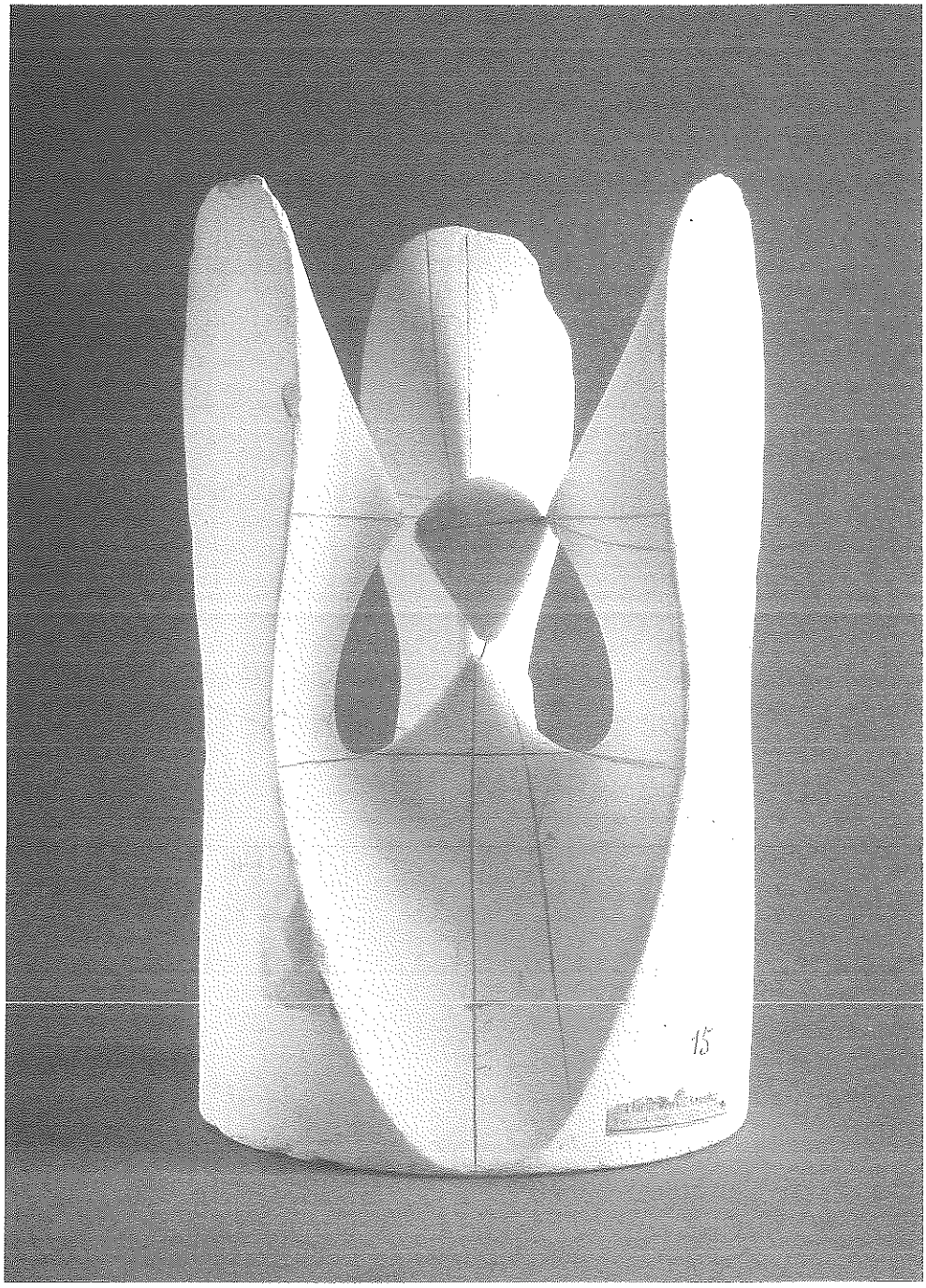


*Figura 16*

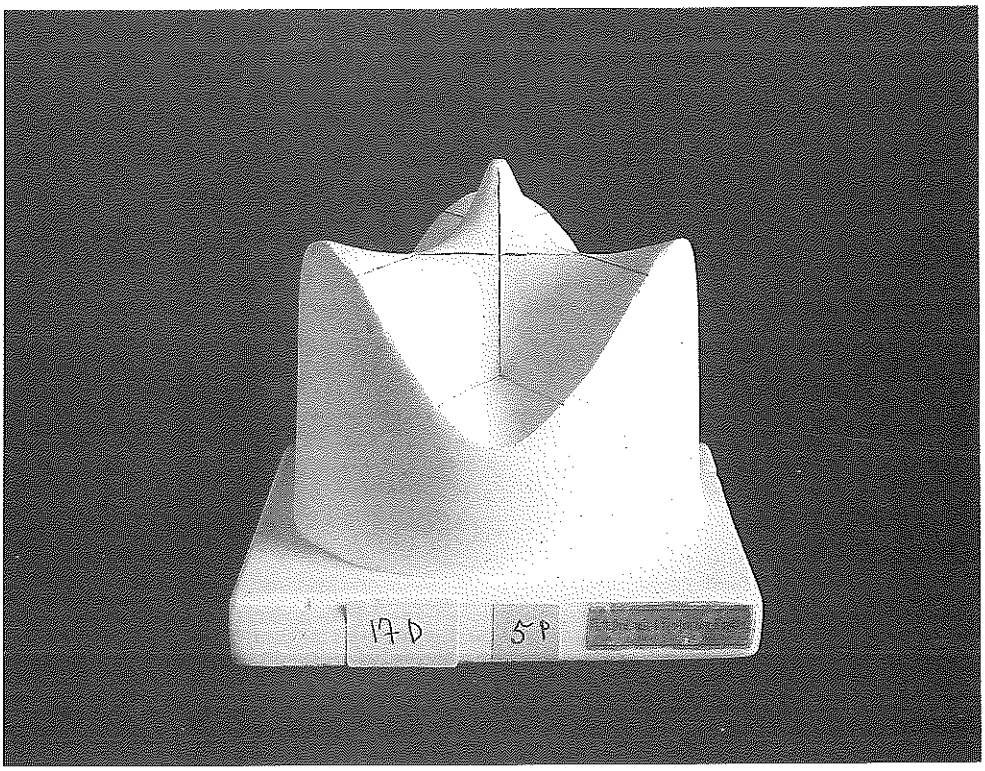


*Figura 17*

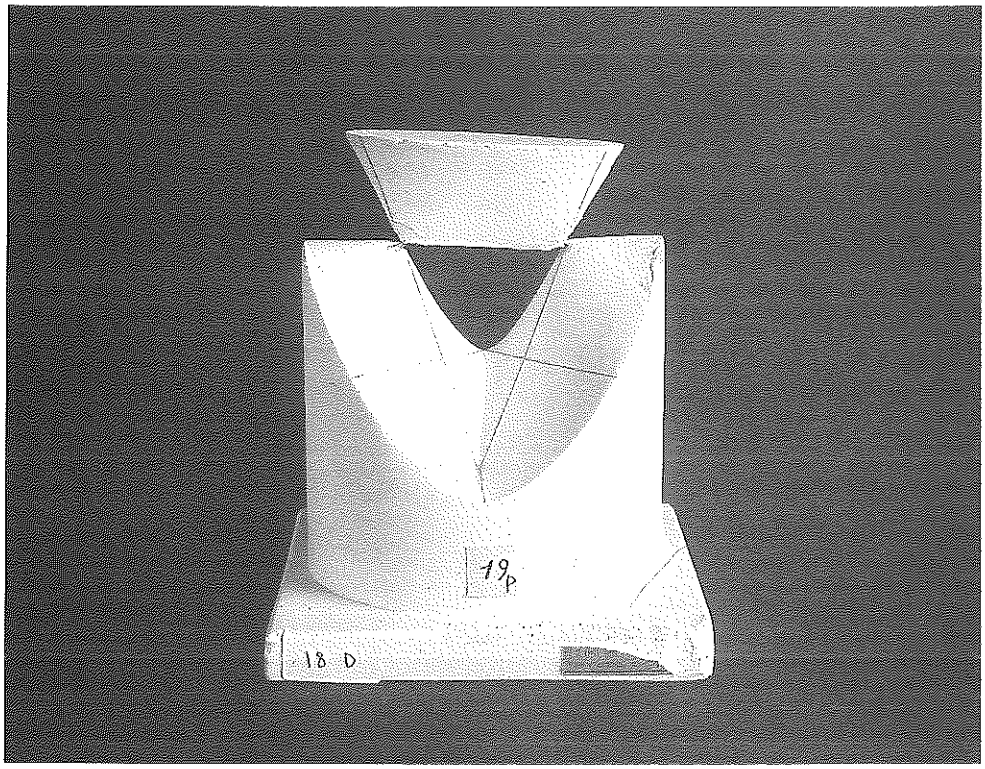


*Figura 18*

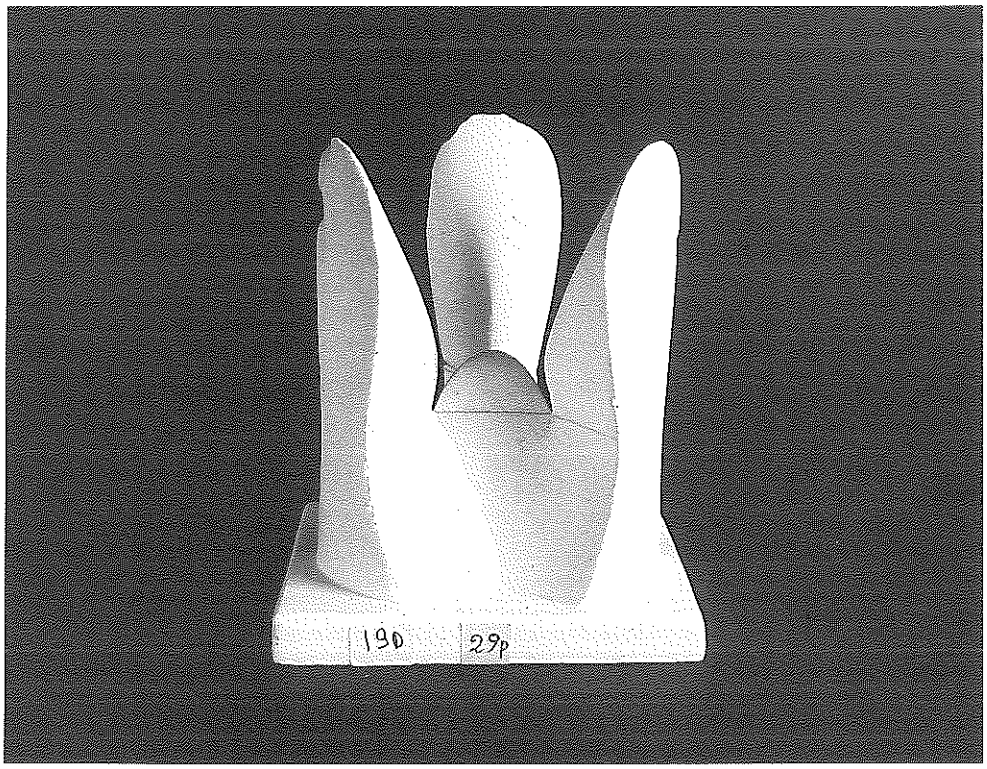


*Figura 19*

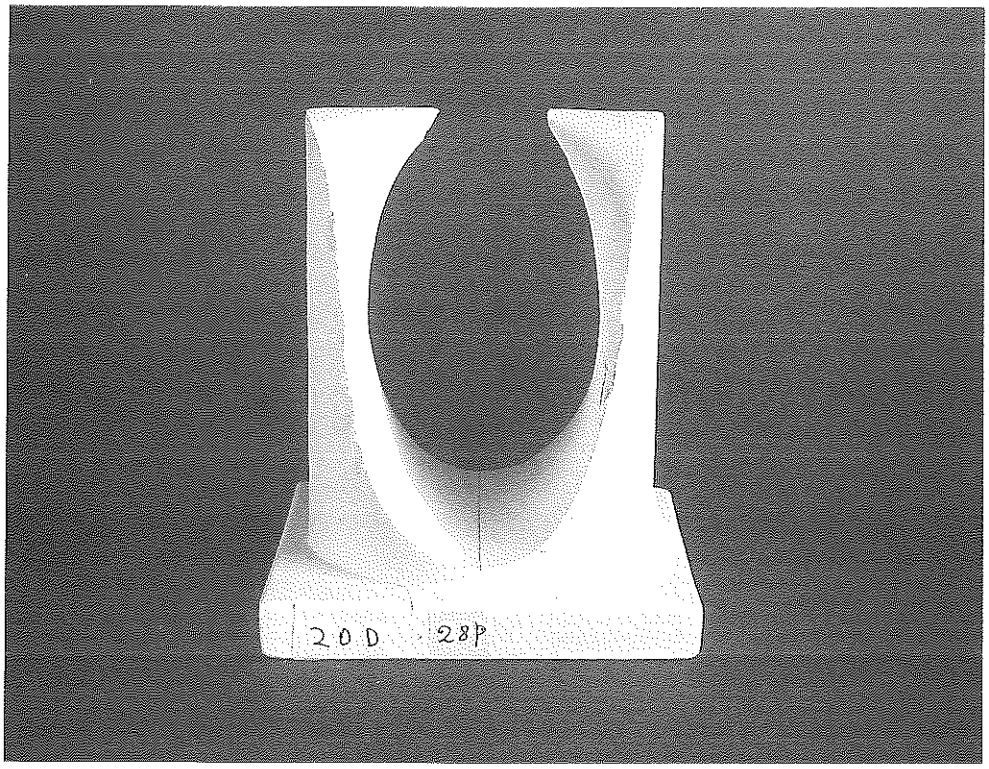


*Figura 20*

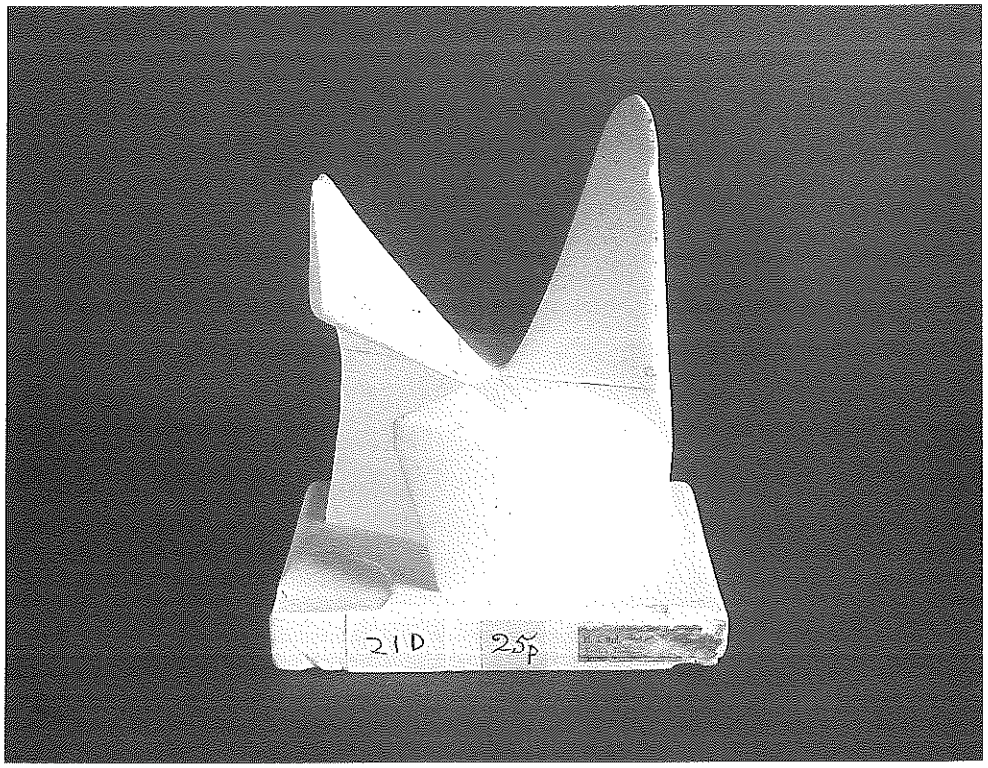


*Figura 21*

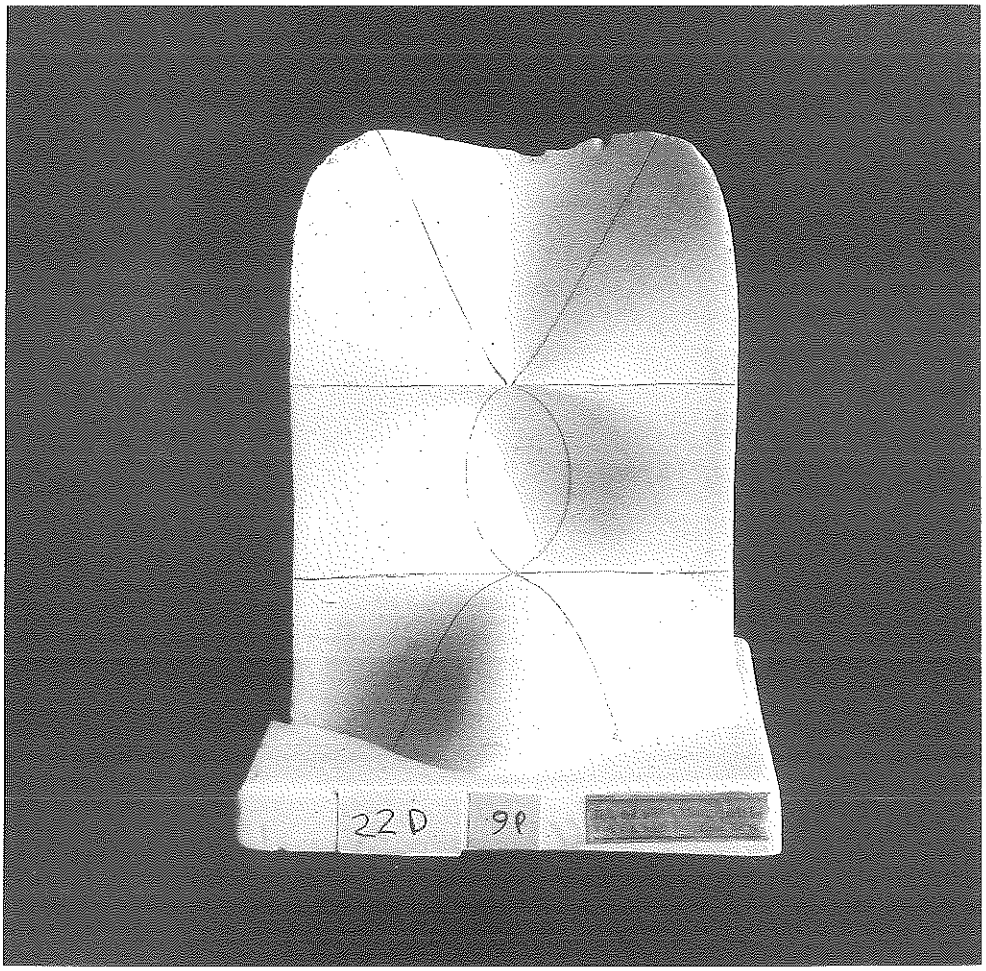


*Figura 22*

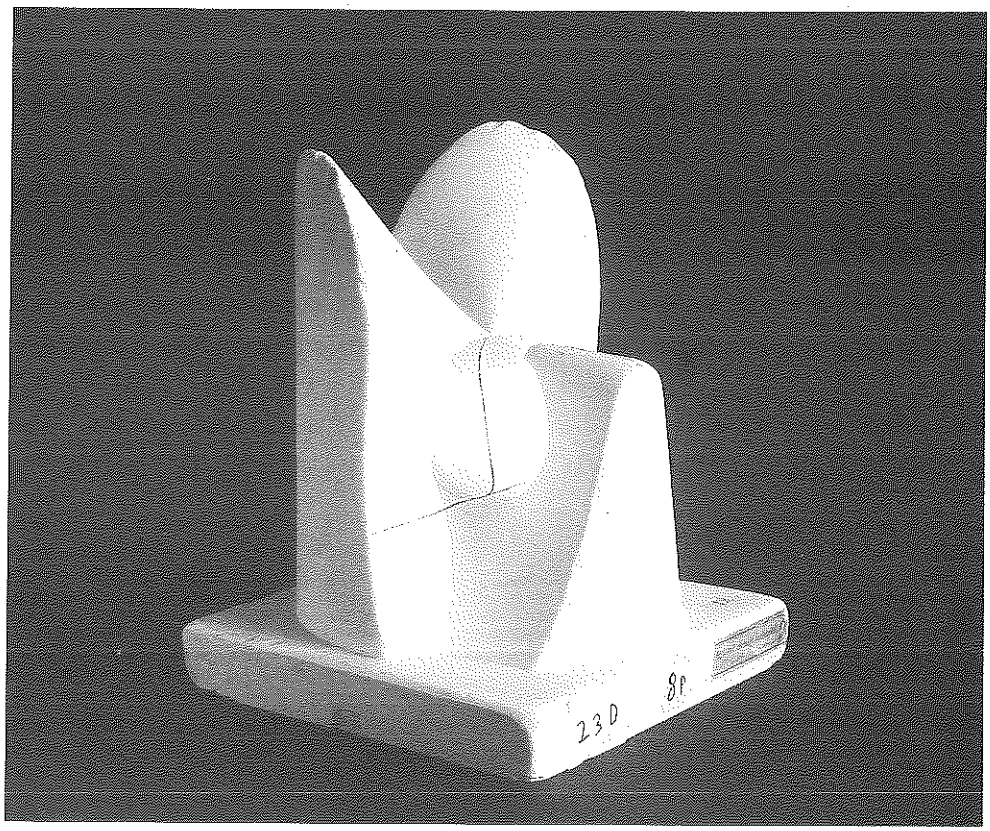


*Figura 23*

*Figura 24*

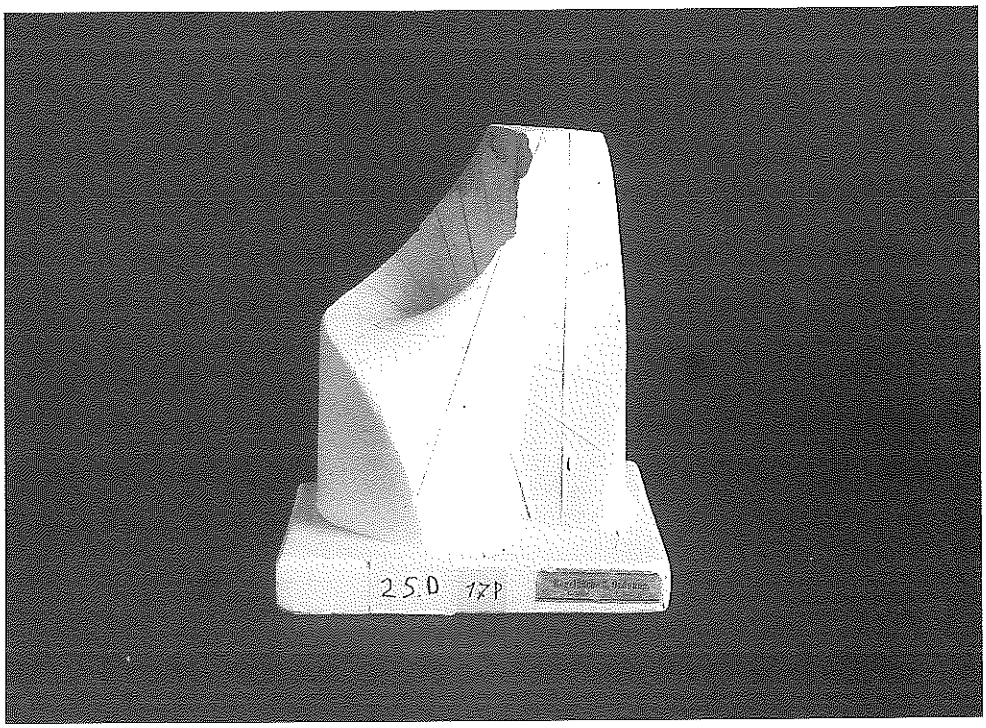


*Figura 25*

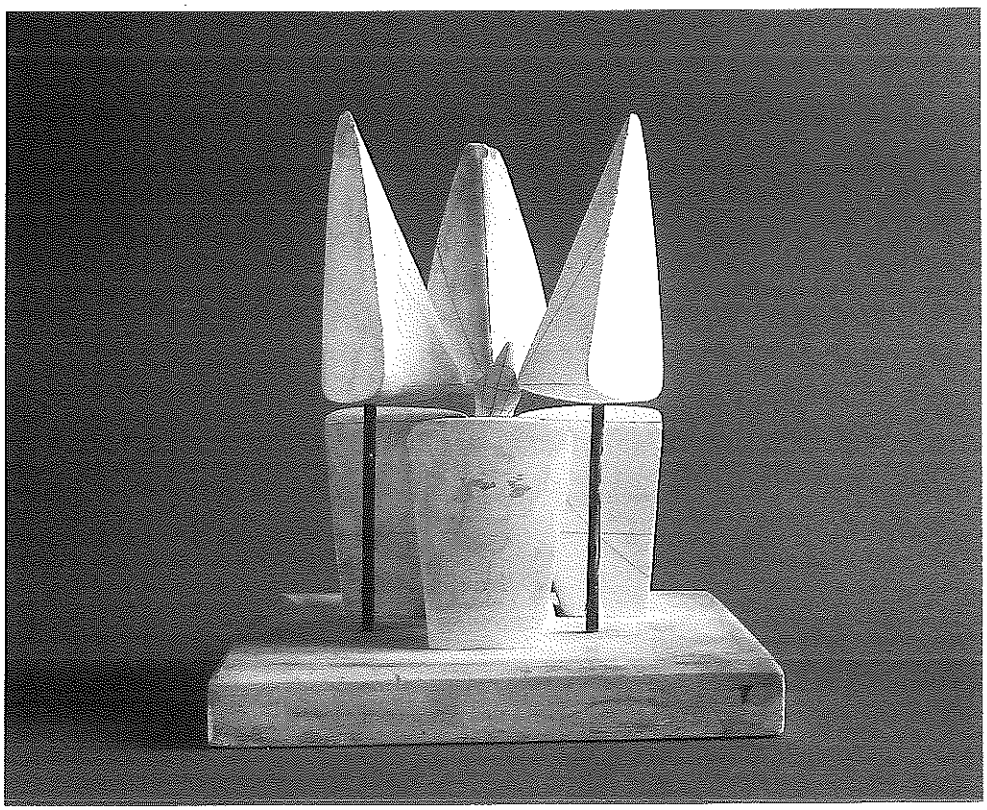

*Figura 26*

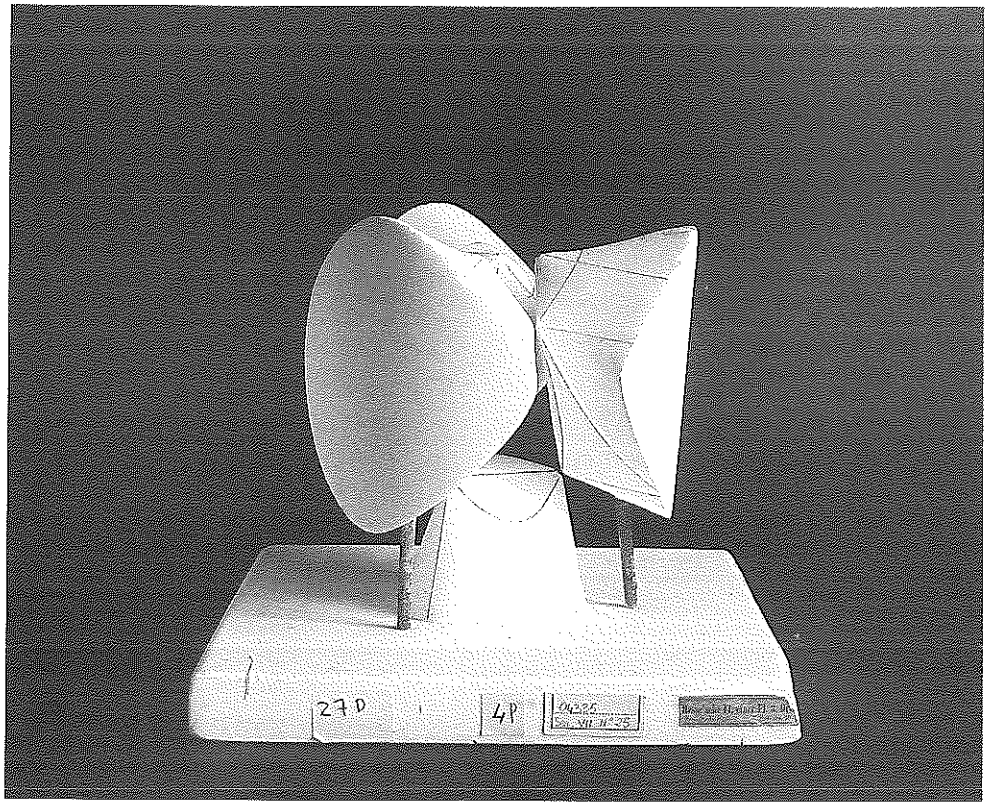


*Figura 27*

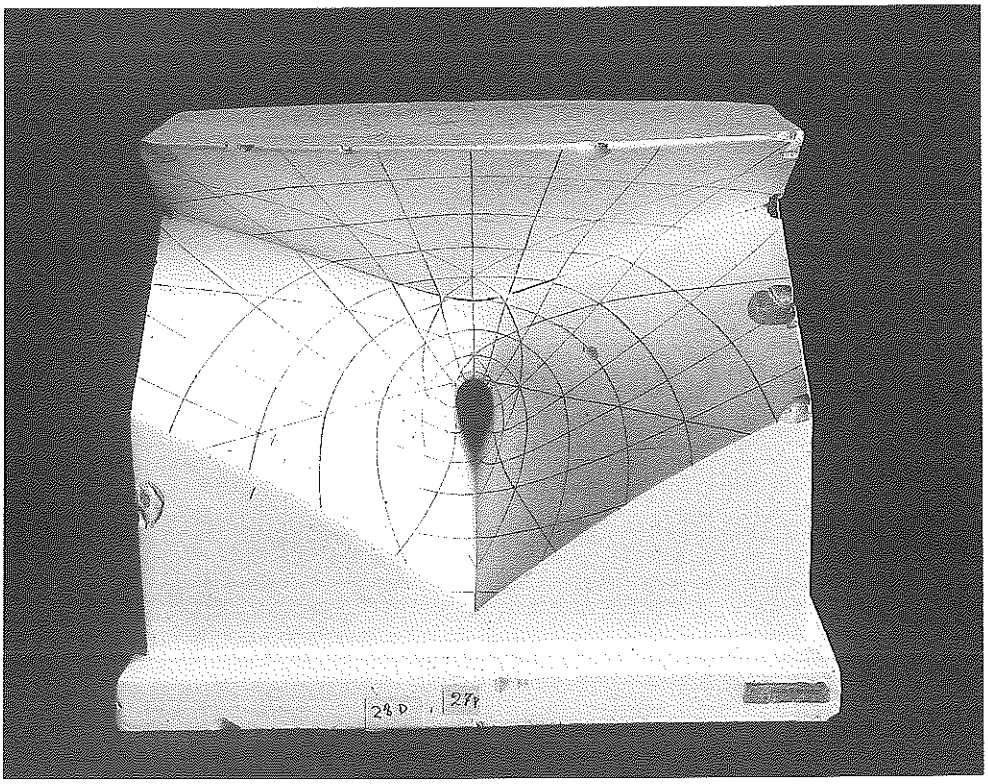

*Figura 28*

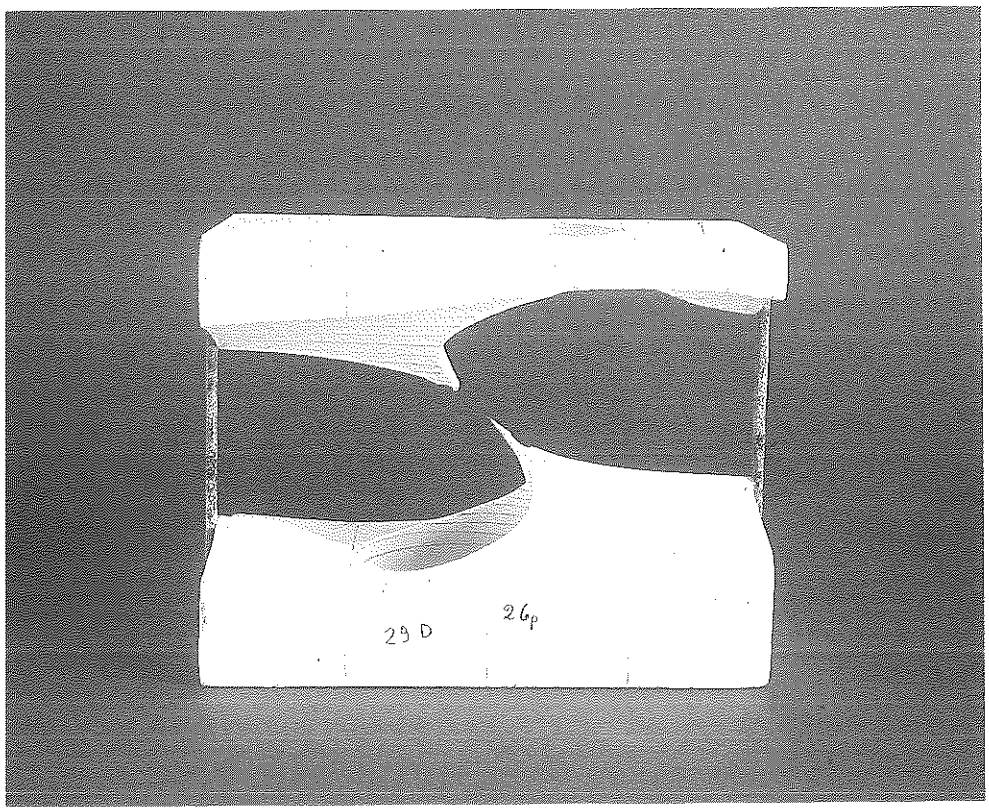


*Figura 29*

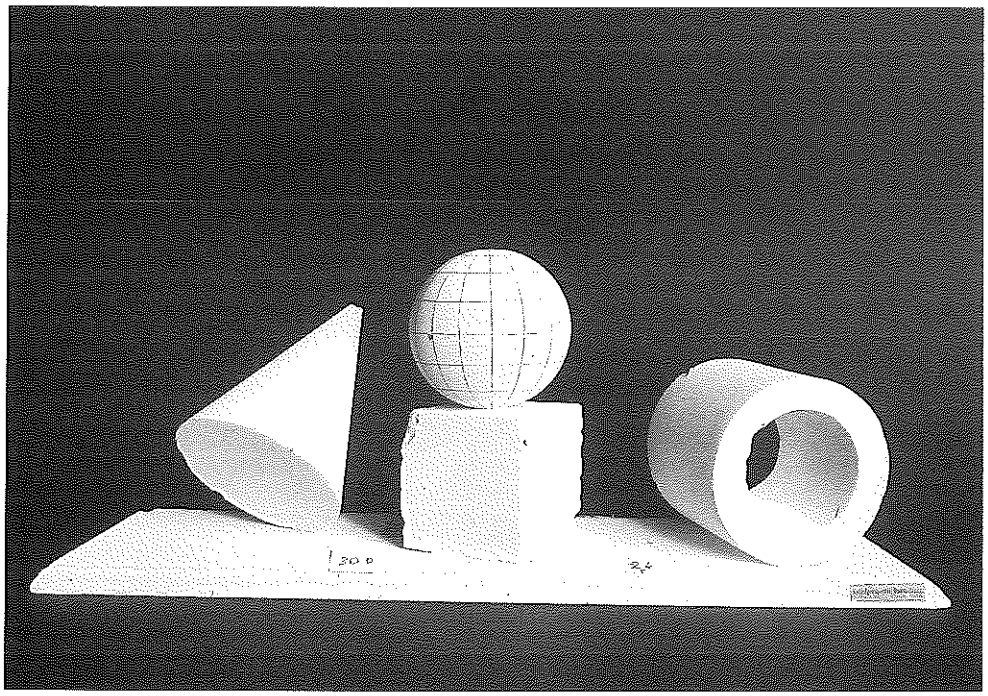

*Figura 30*

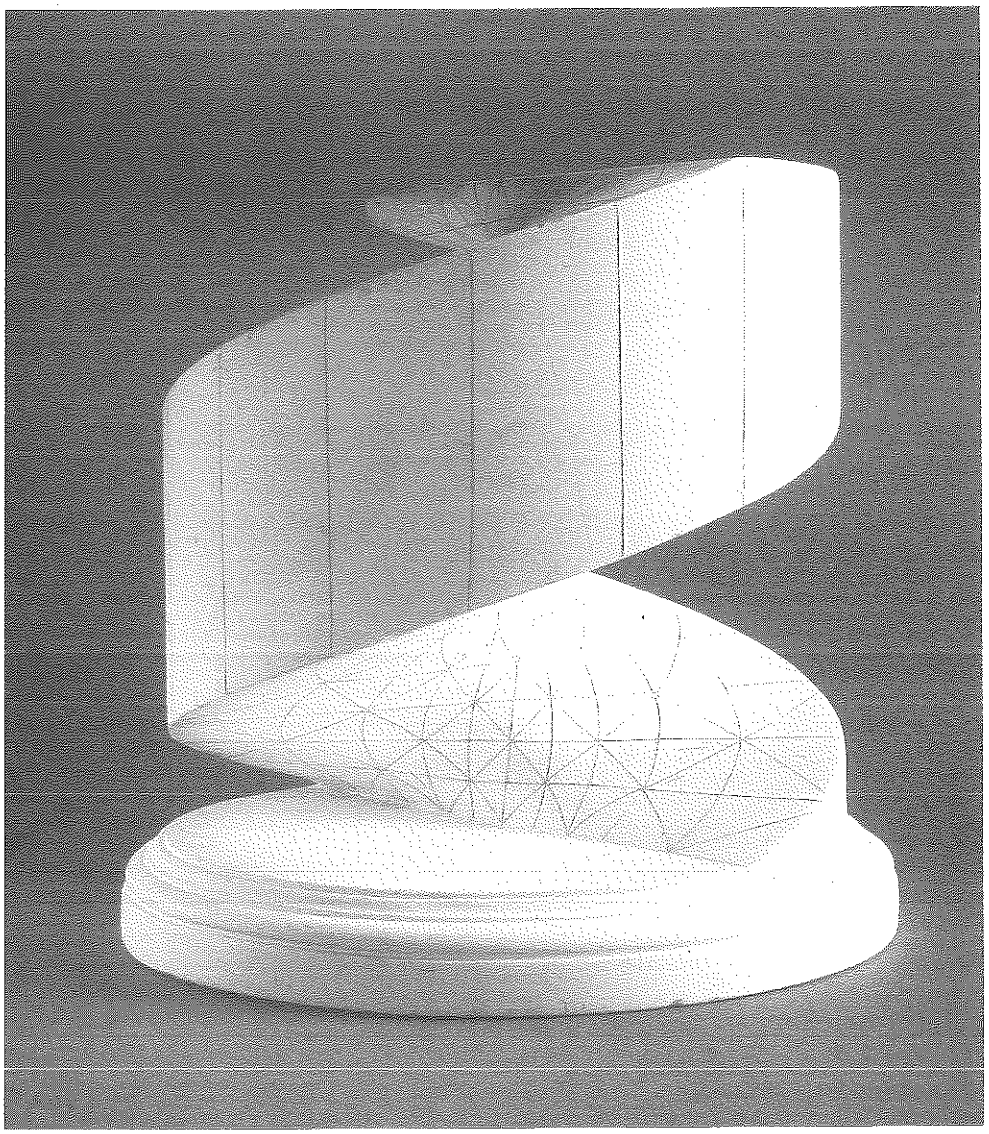

*Figura 31*

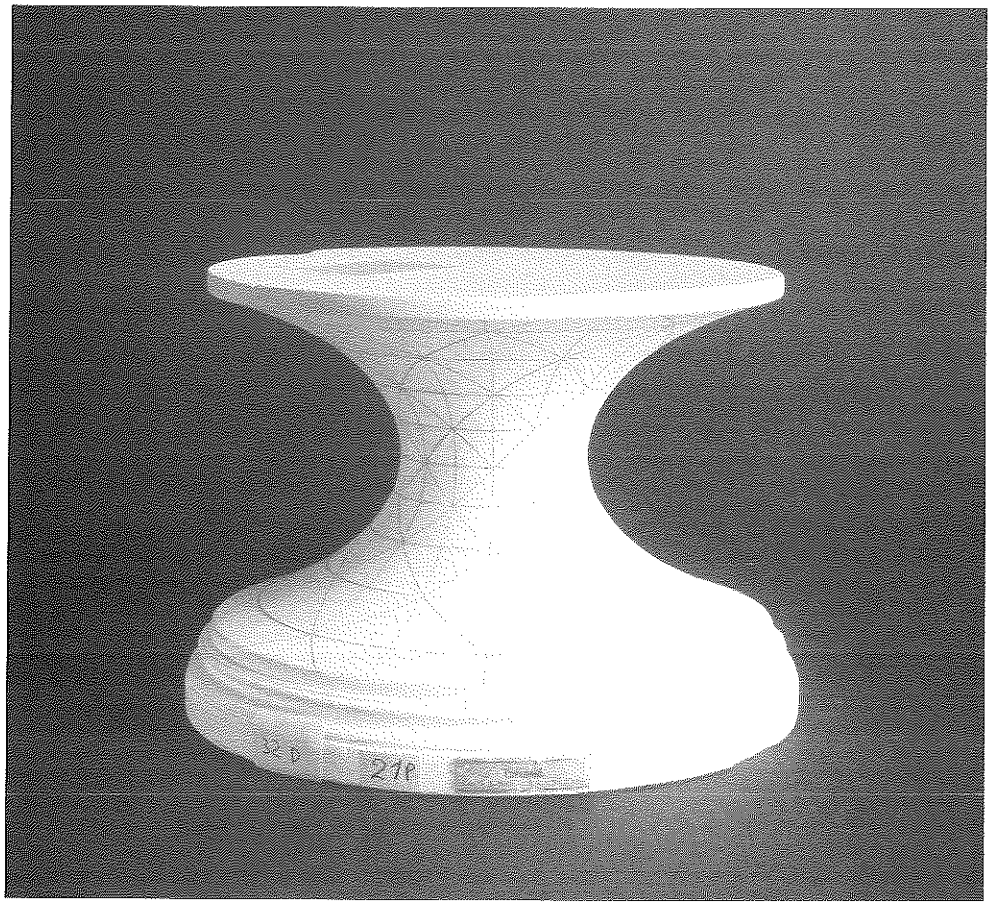

*Figura 32*

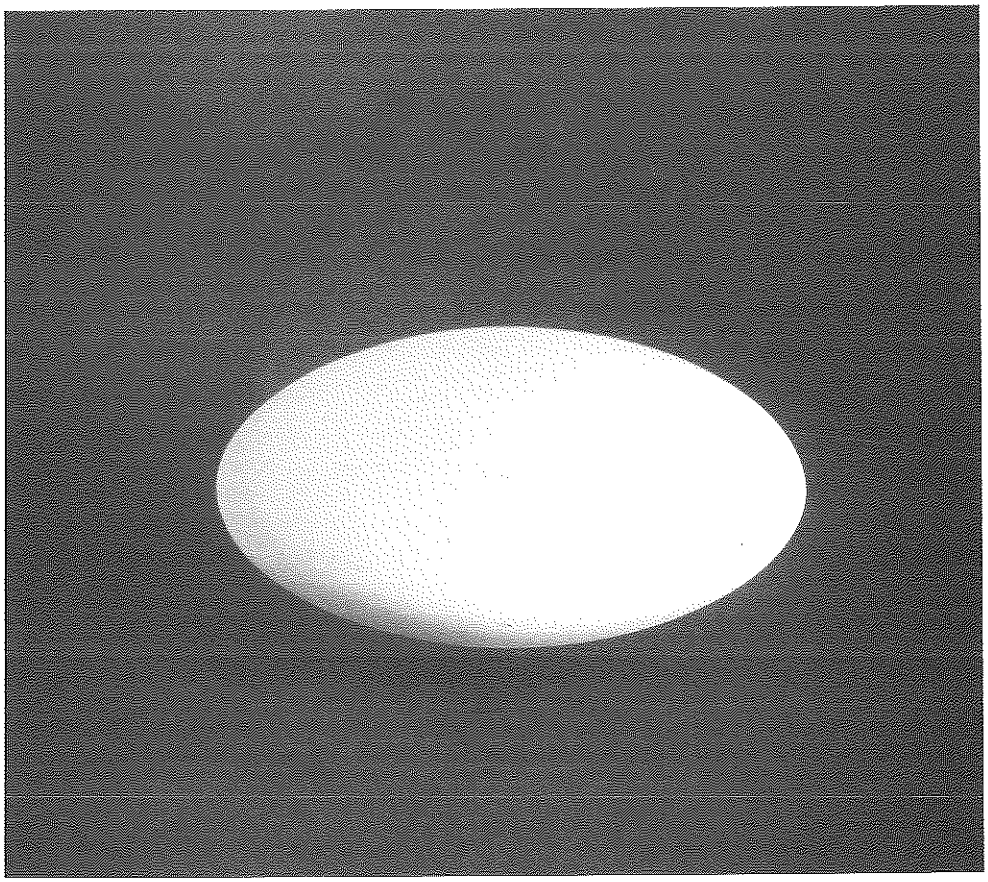

*Figura 33*

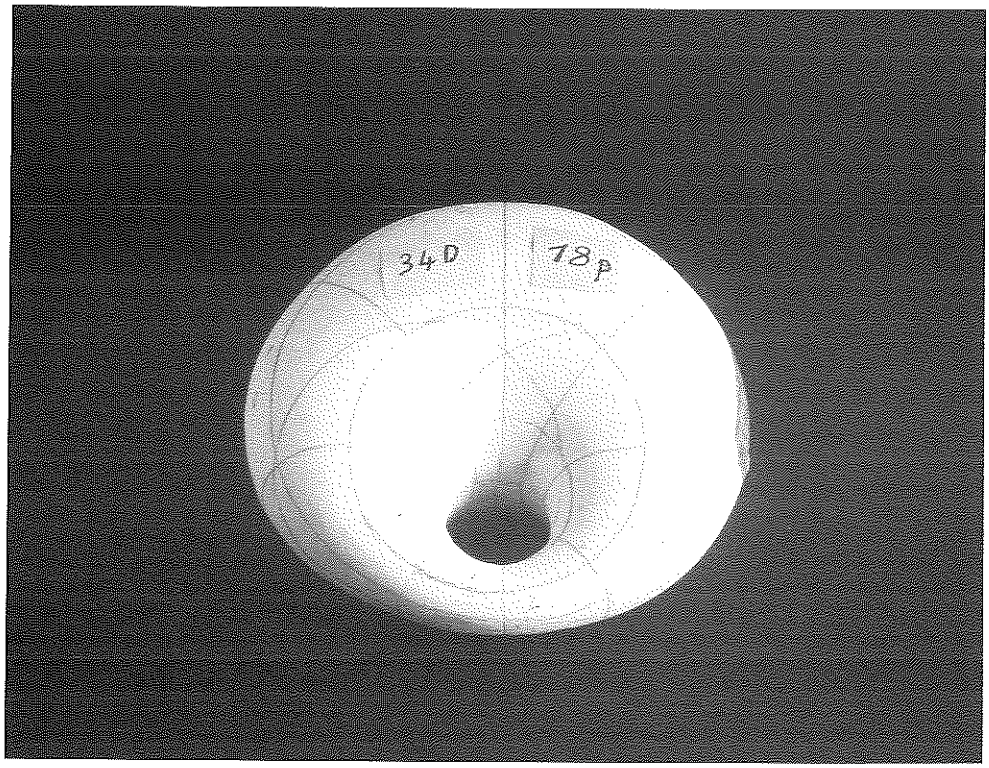


*Figura 34*

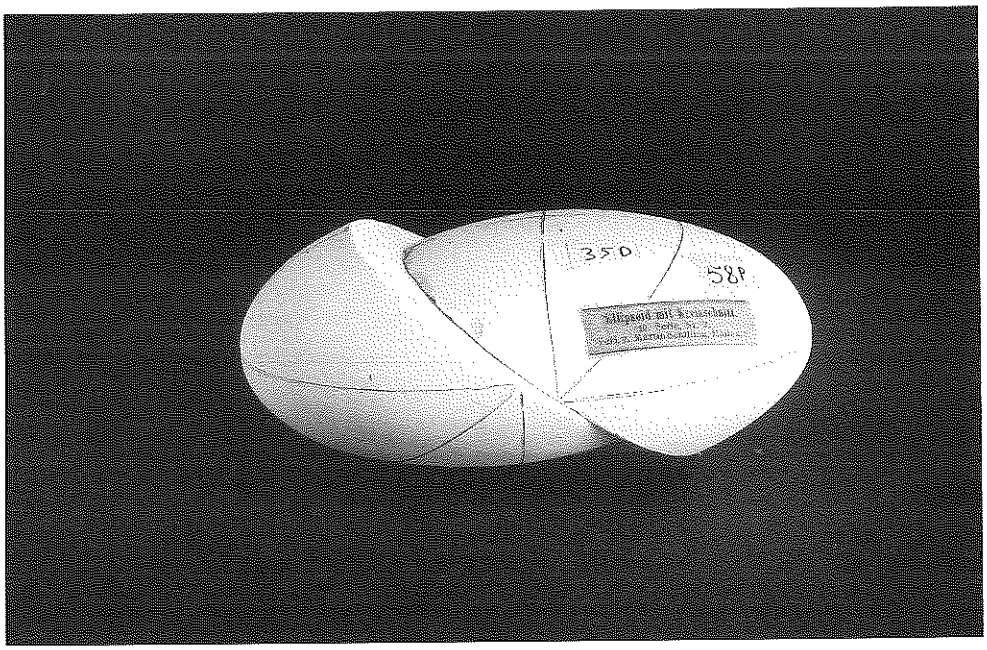


*Figura 35*

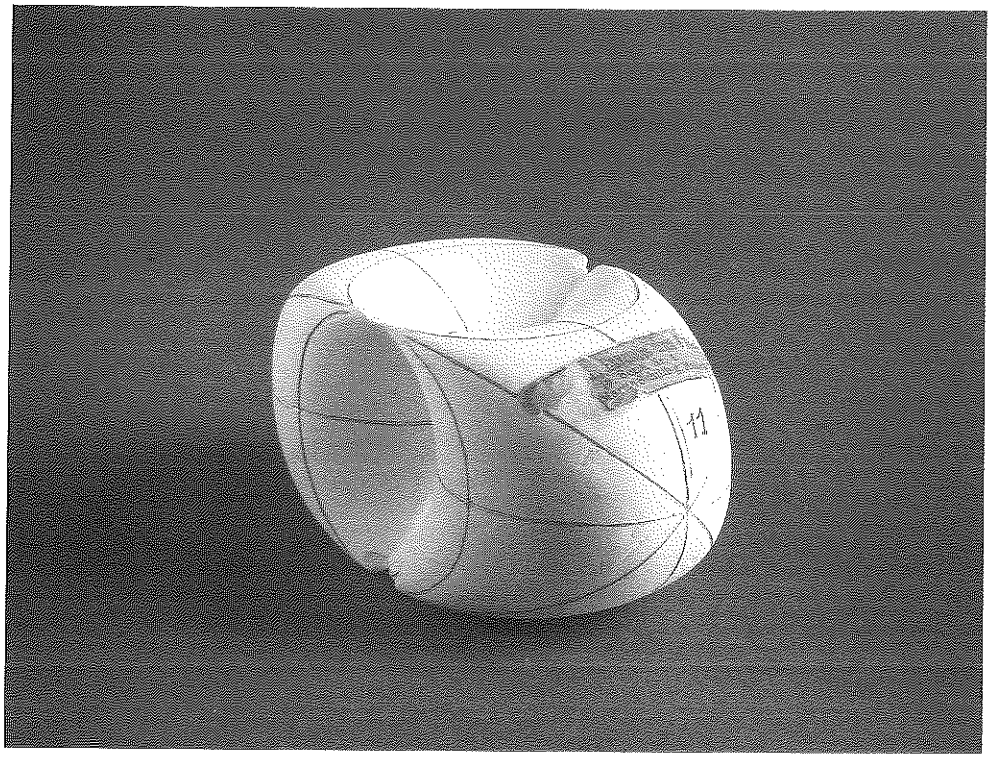

*Figura 36*

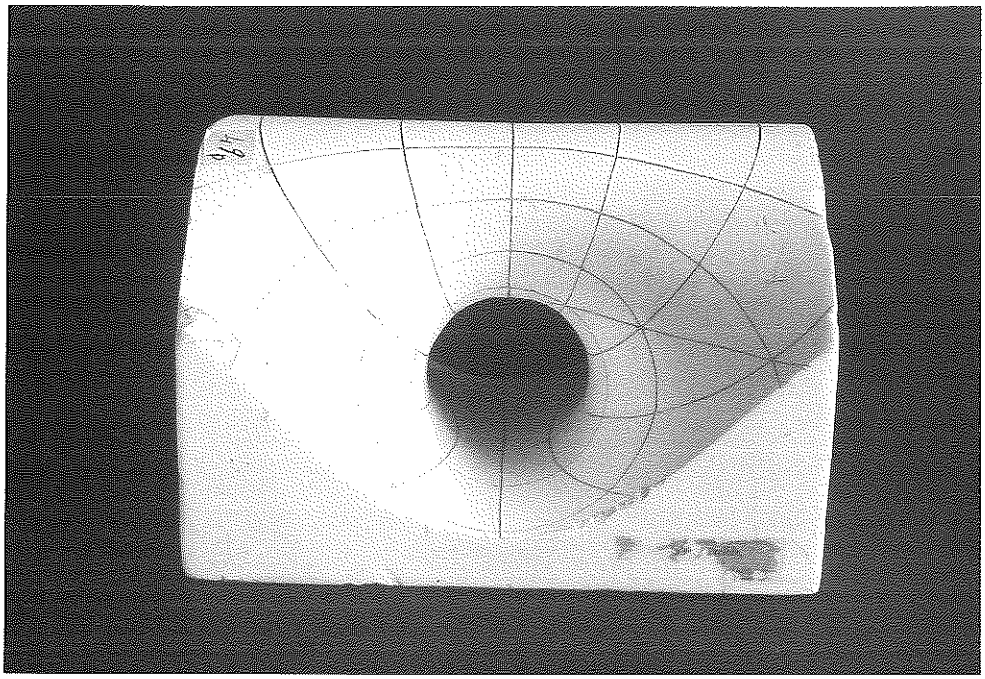

*Figura 37*

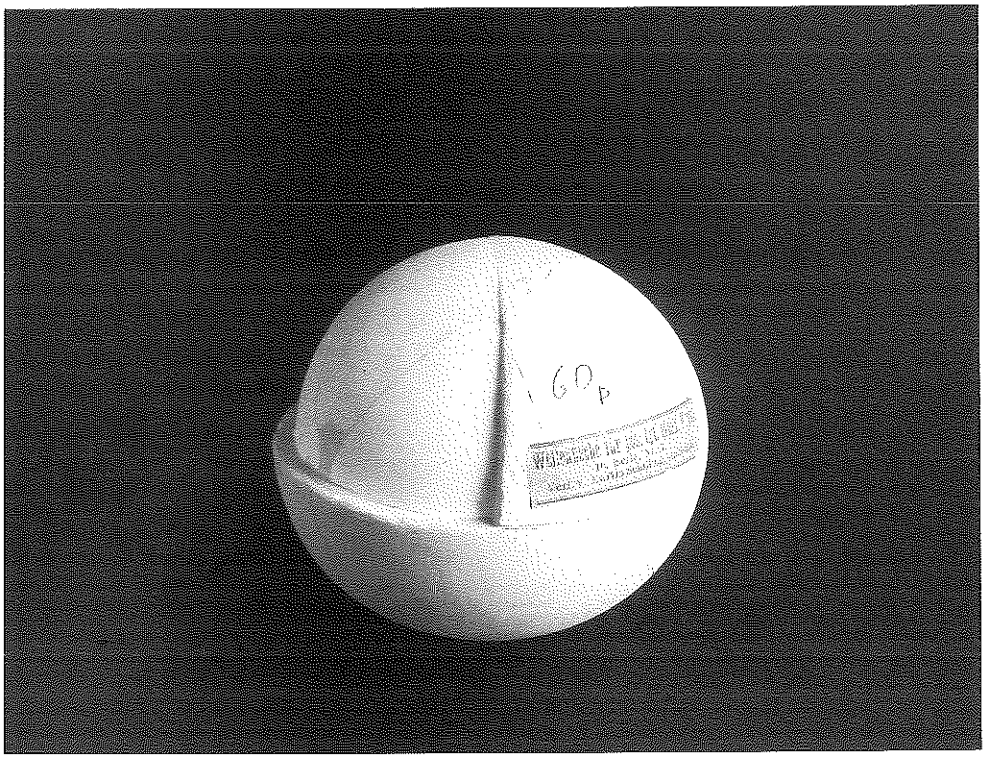

*Figura 38*

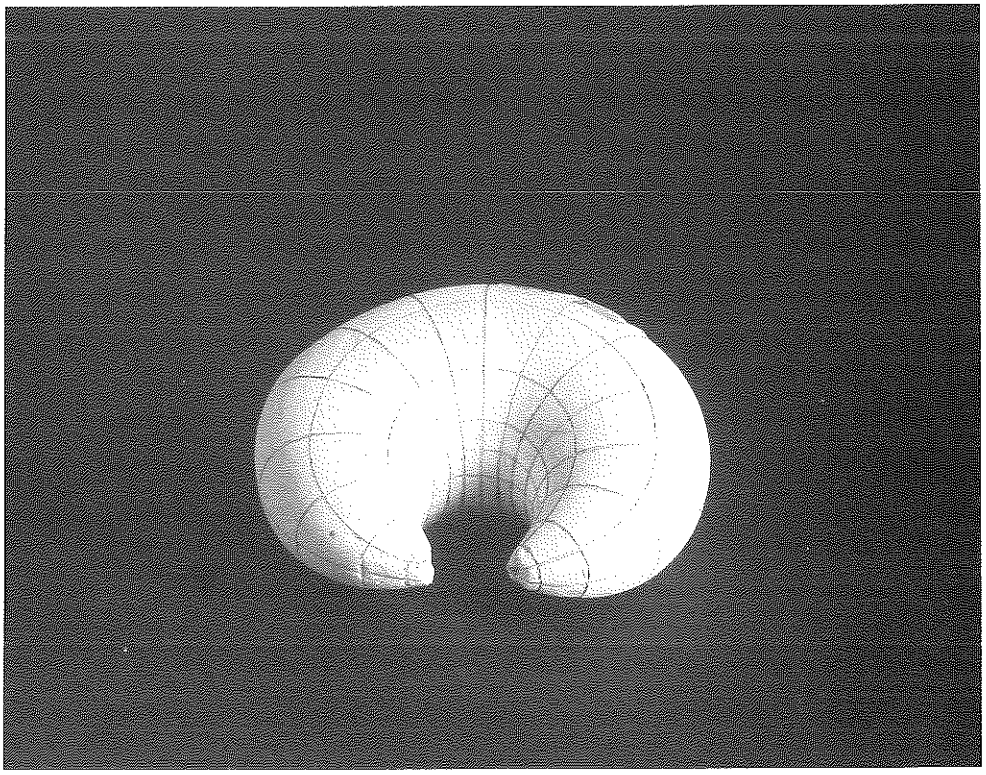

*Figura 39*

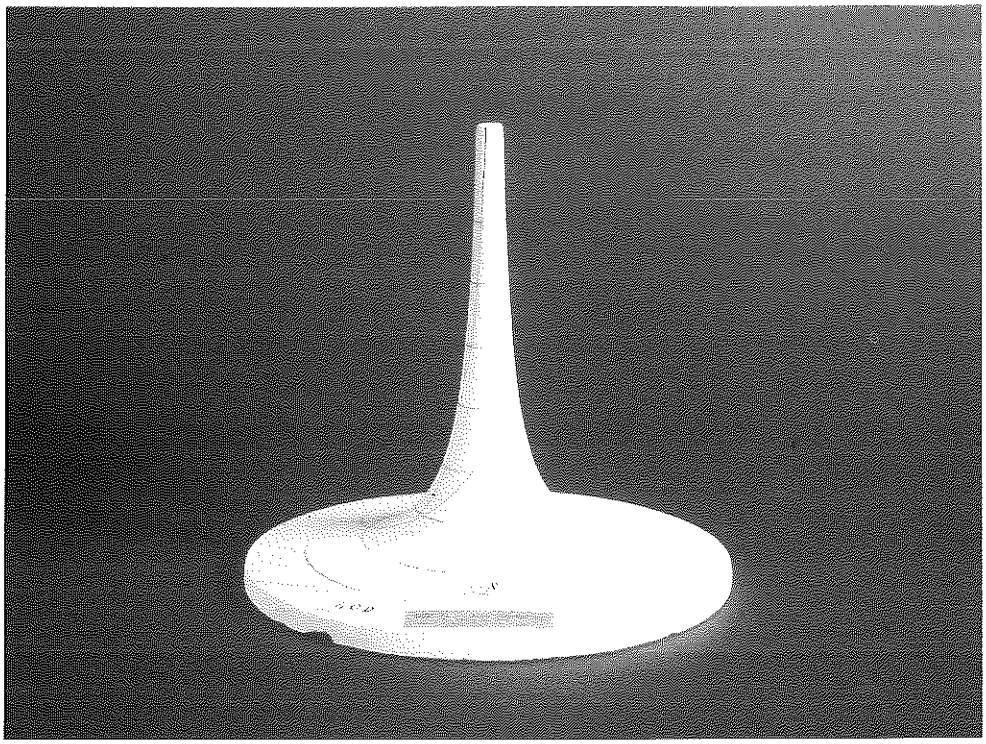

*Figura 40*

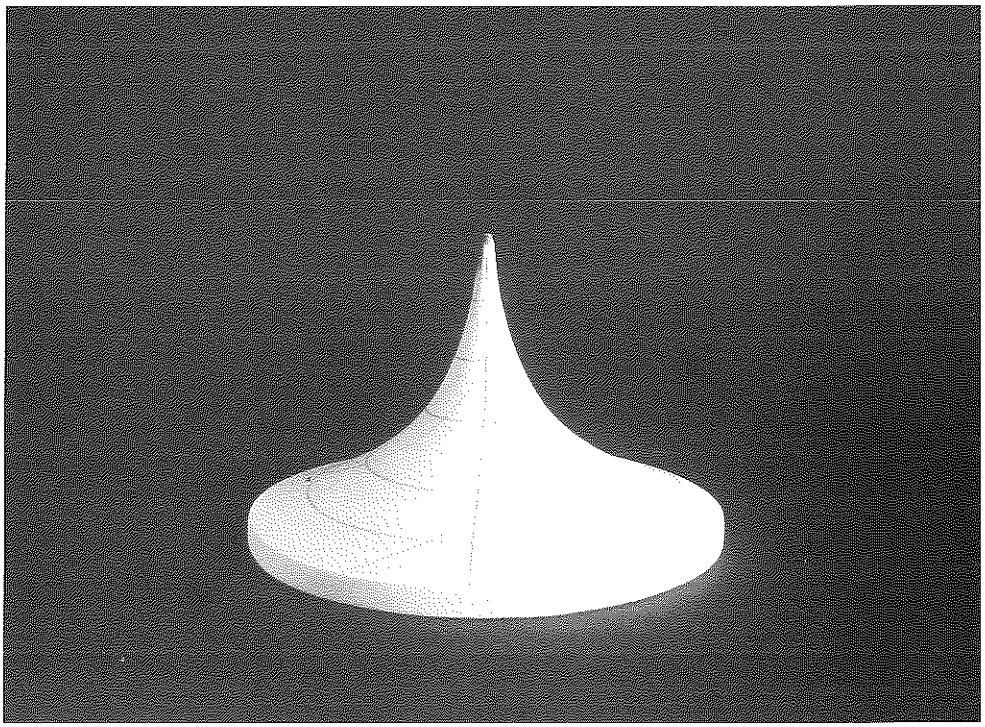

*Figura 41*

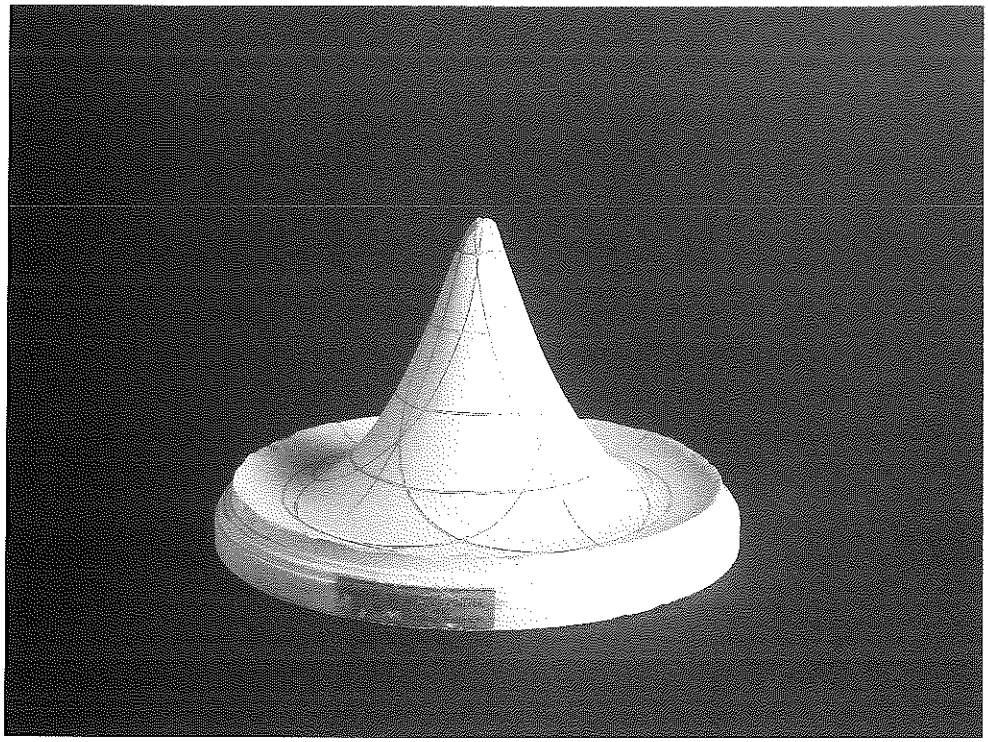

*Figura 42*

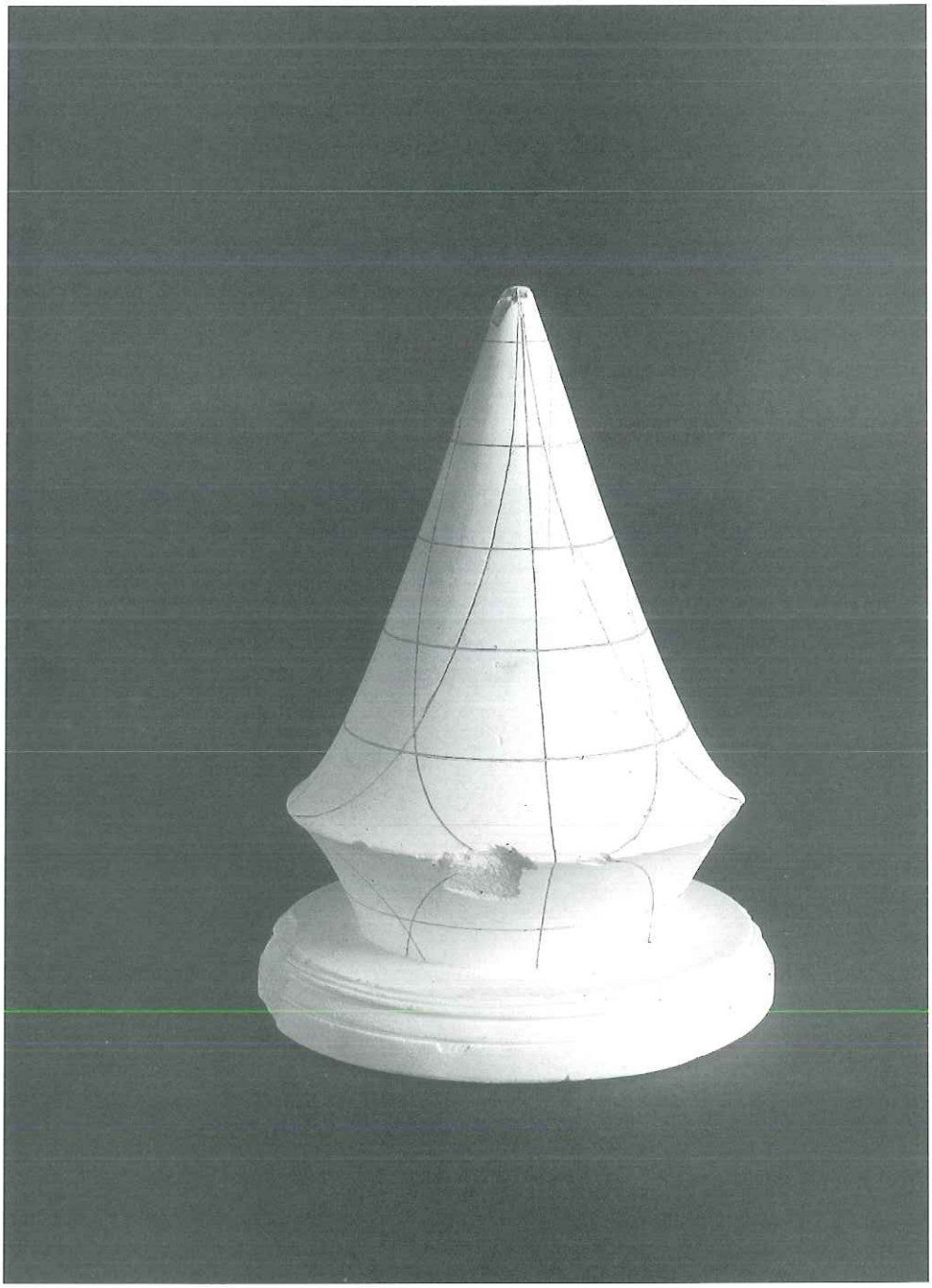

*Figura 43*

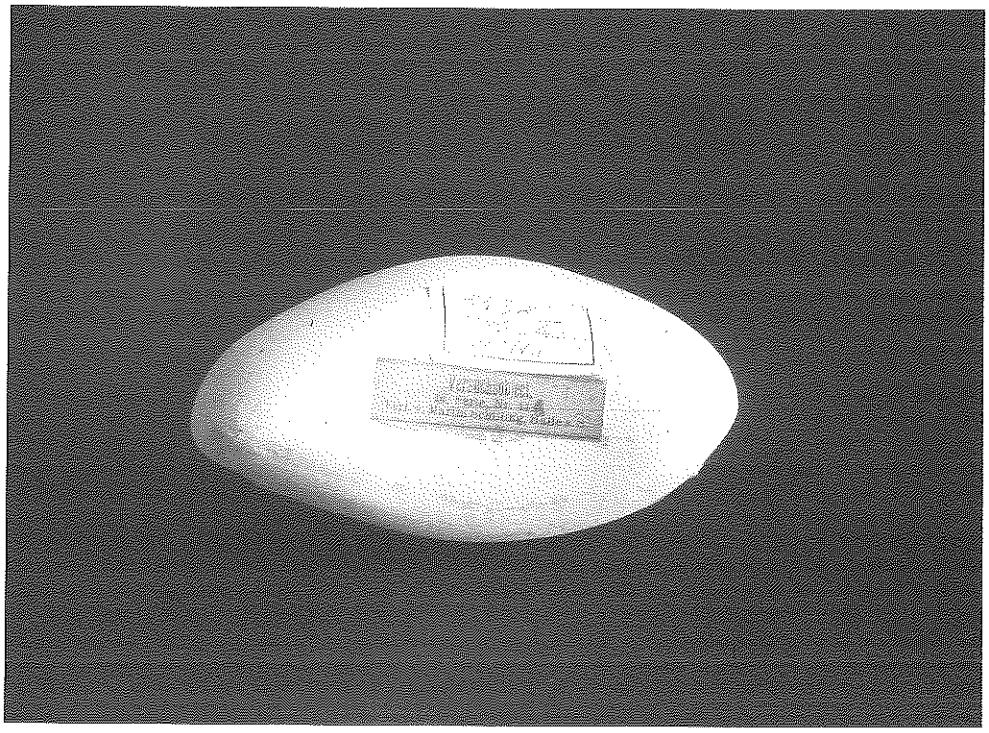

*Figura 44*

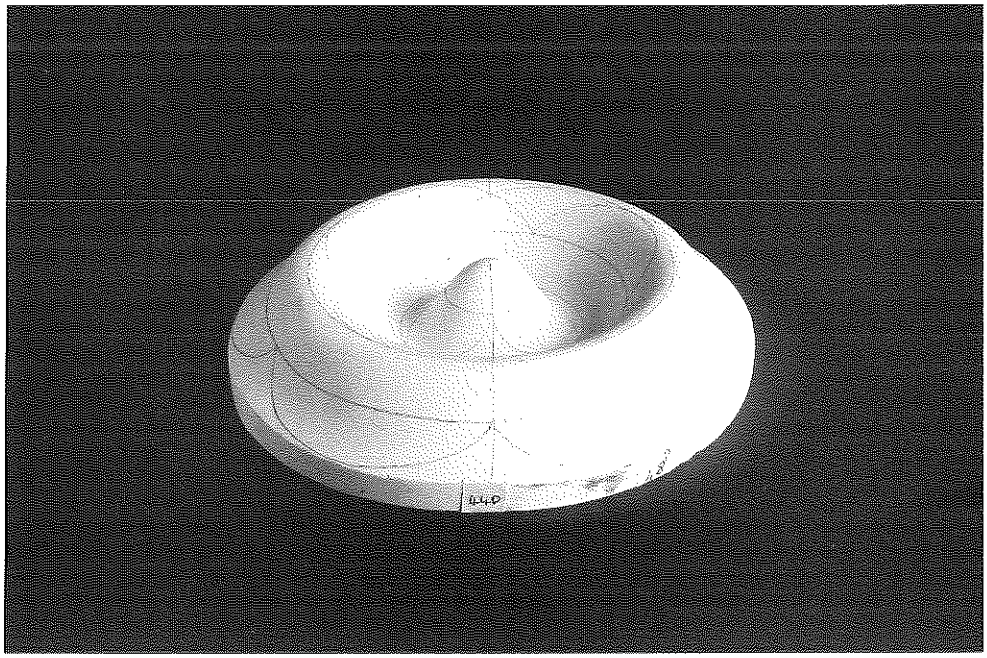

*Figura 45*

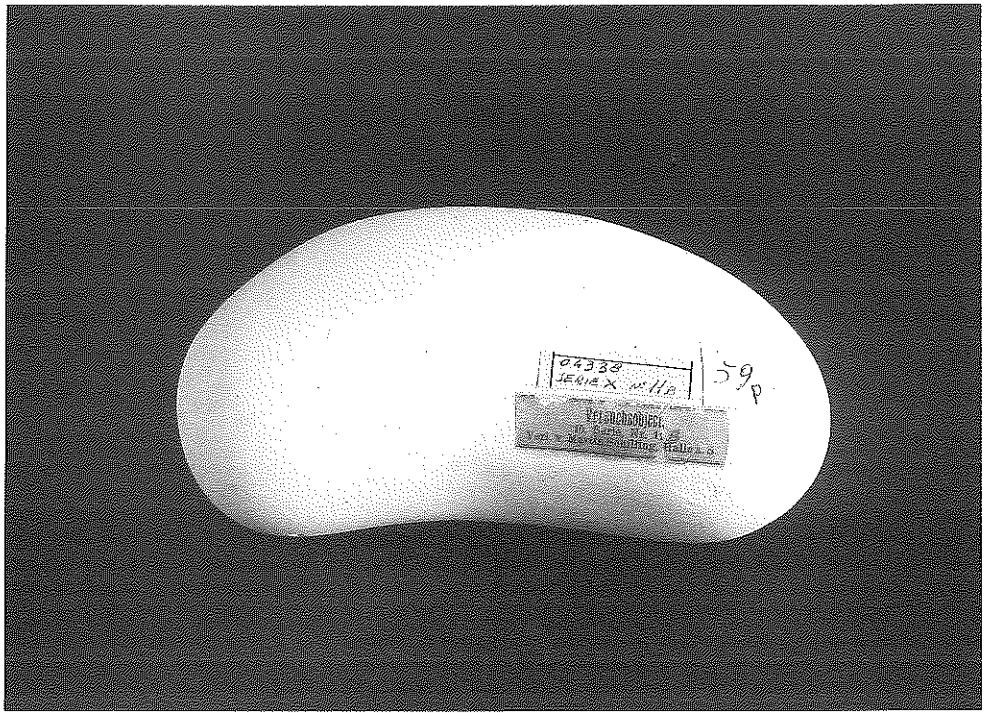

*Figura 46*

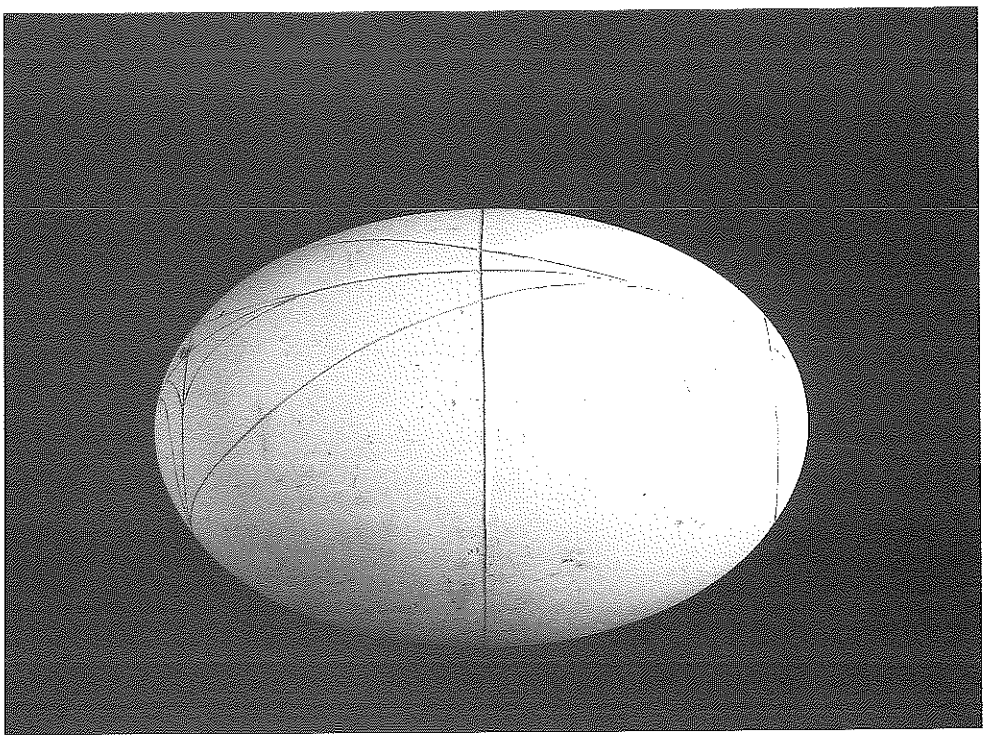

*Figura 47*

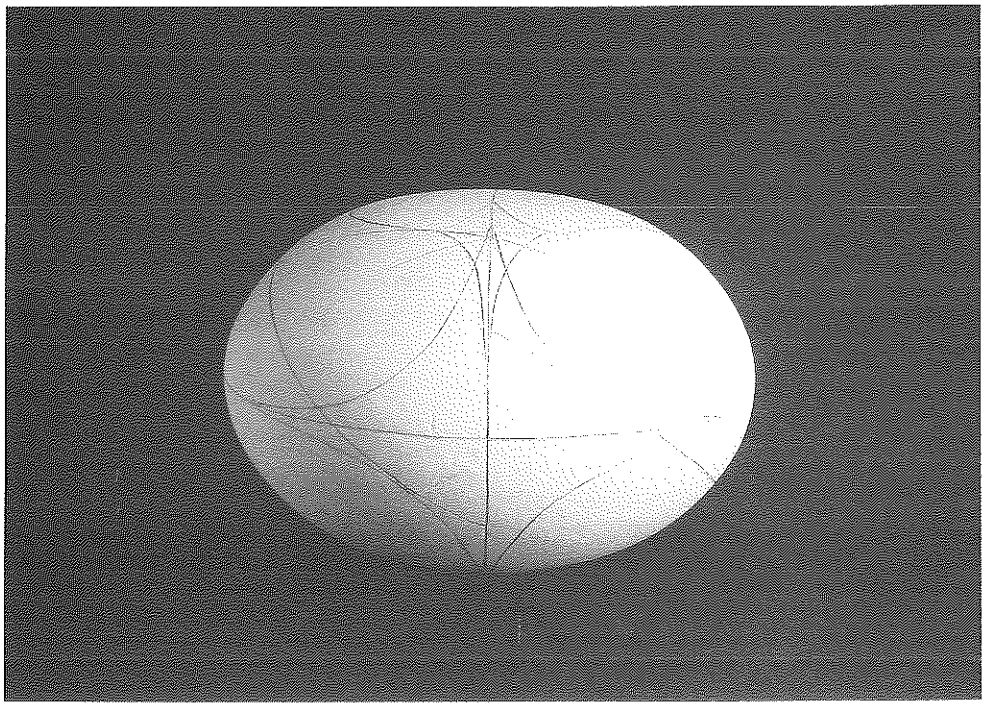

*Figura 48*

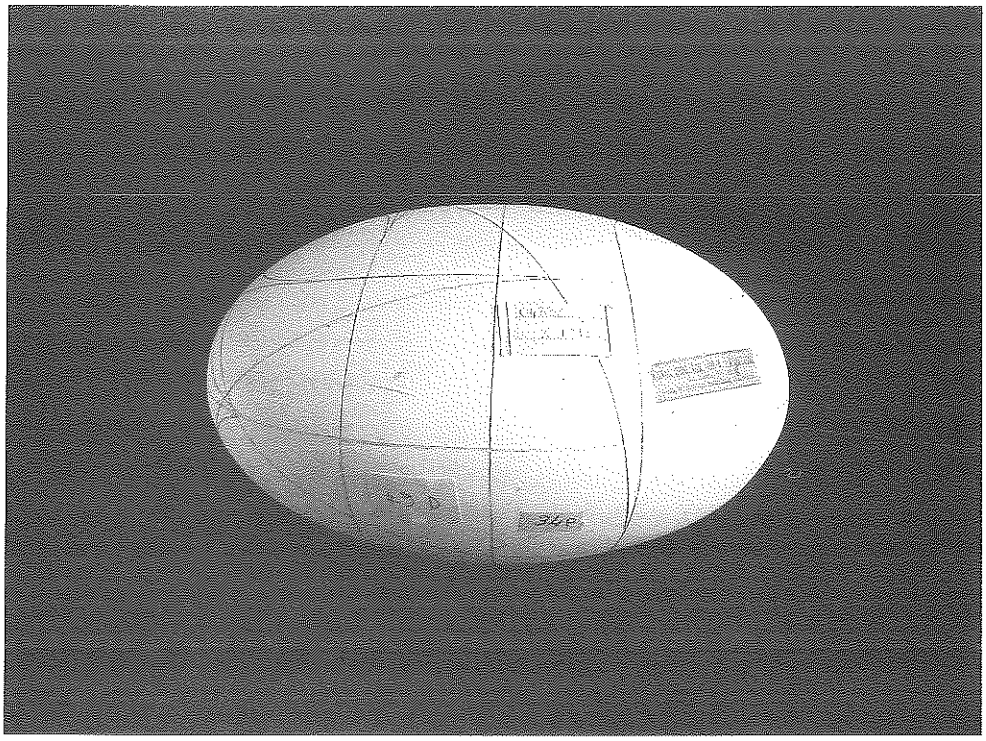

*Figura 49*

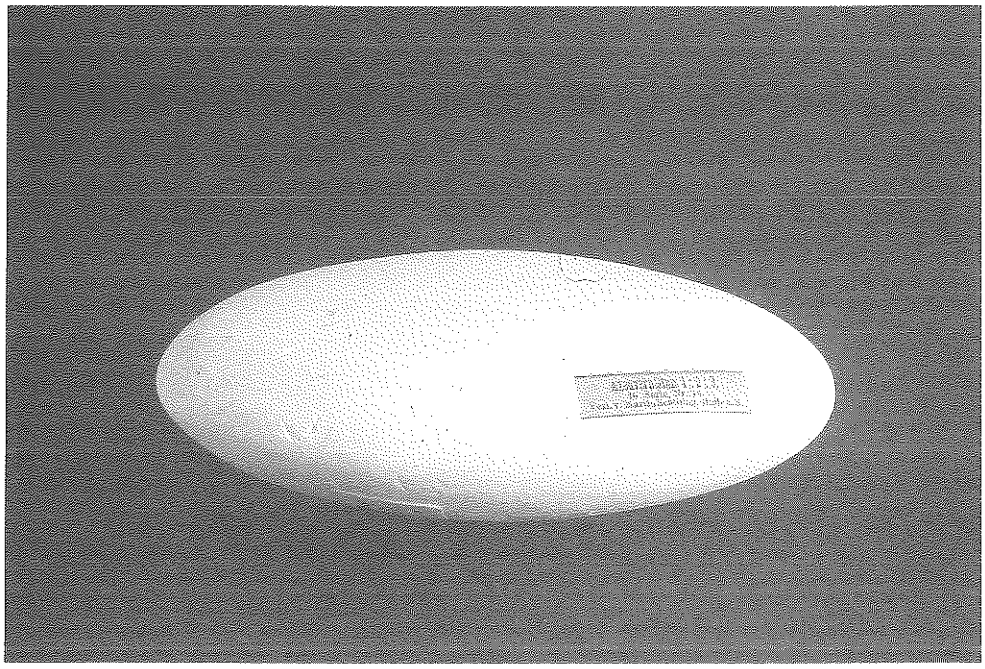

*Figura 50*

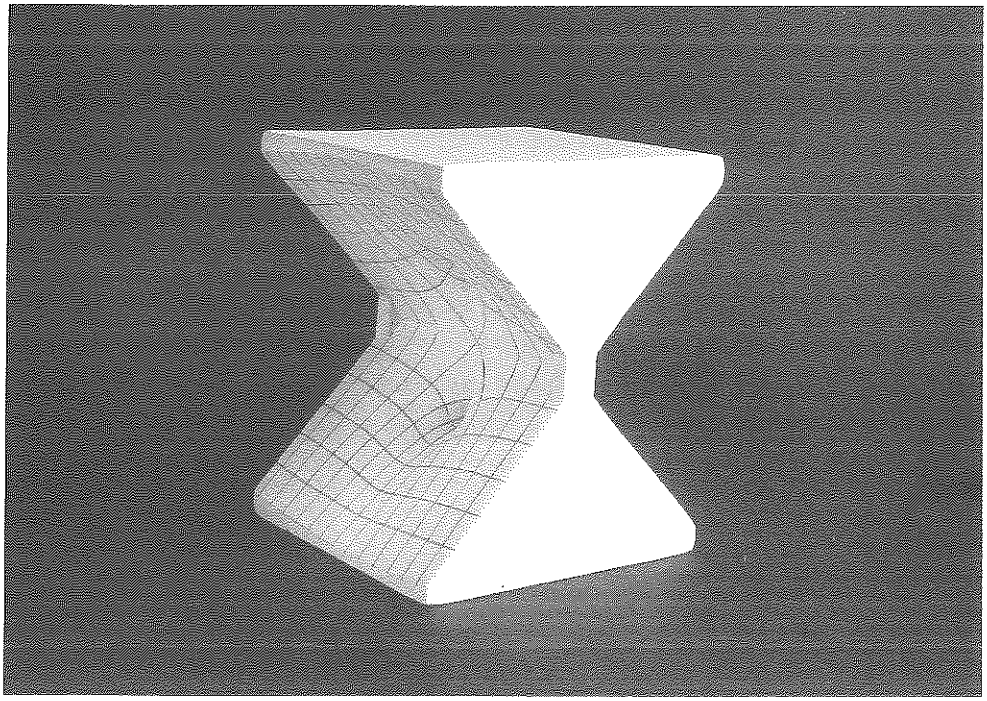

*Figura 51*

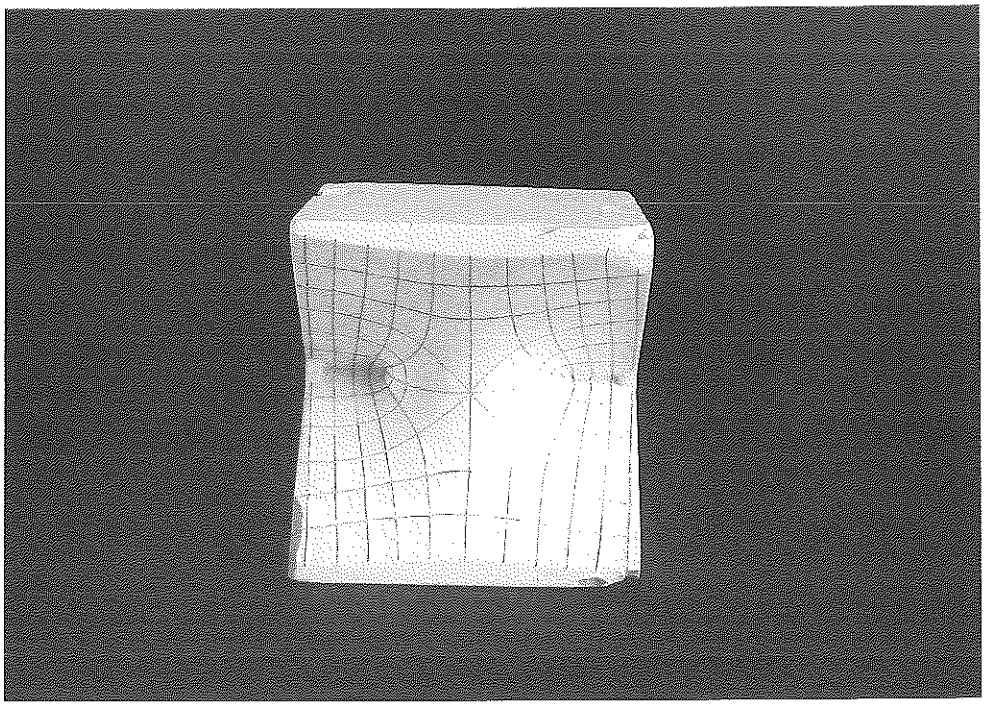

*Figura 52*

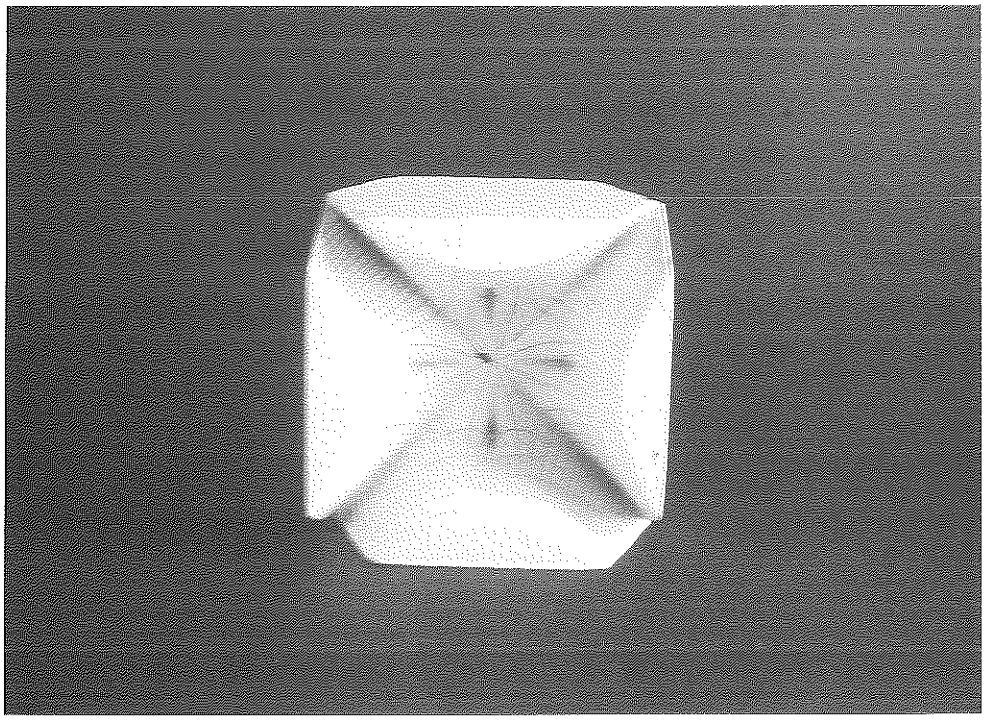

*Figura 53*

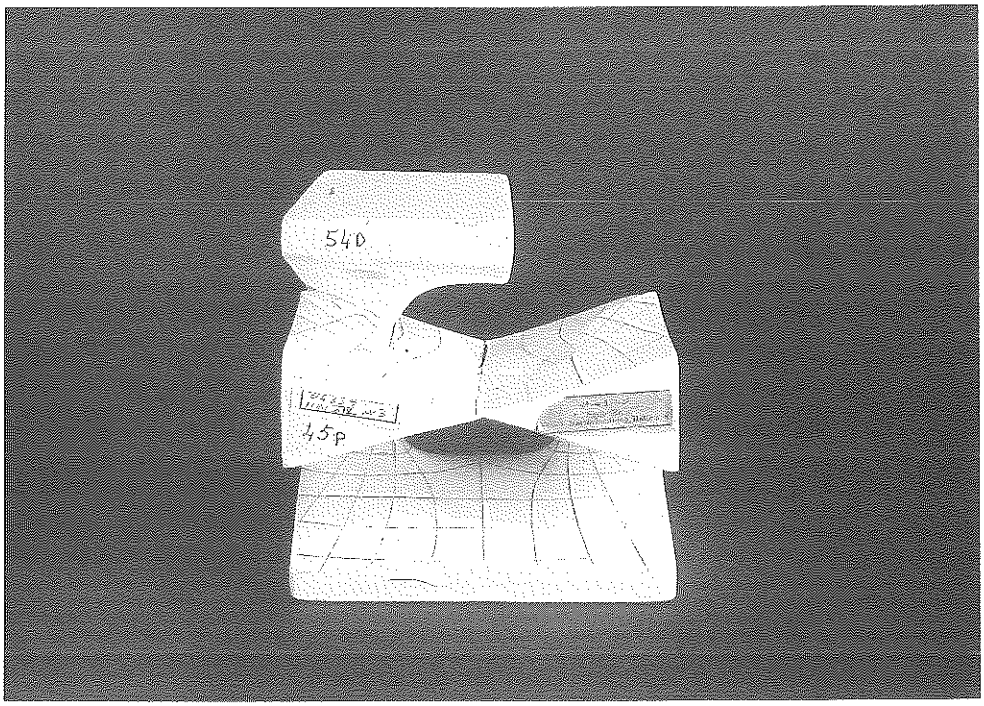


*Figura 54*

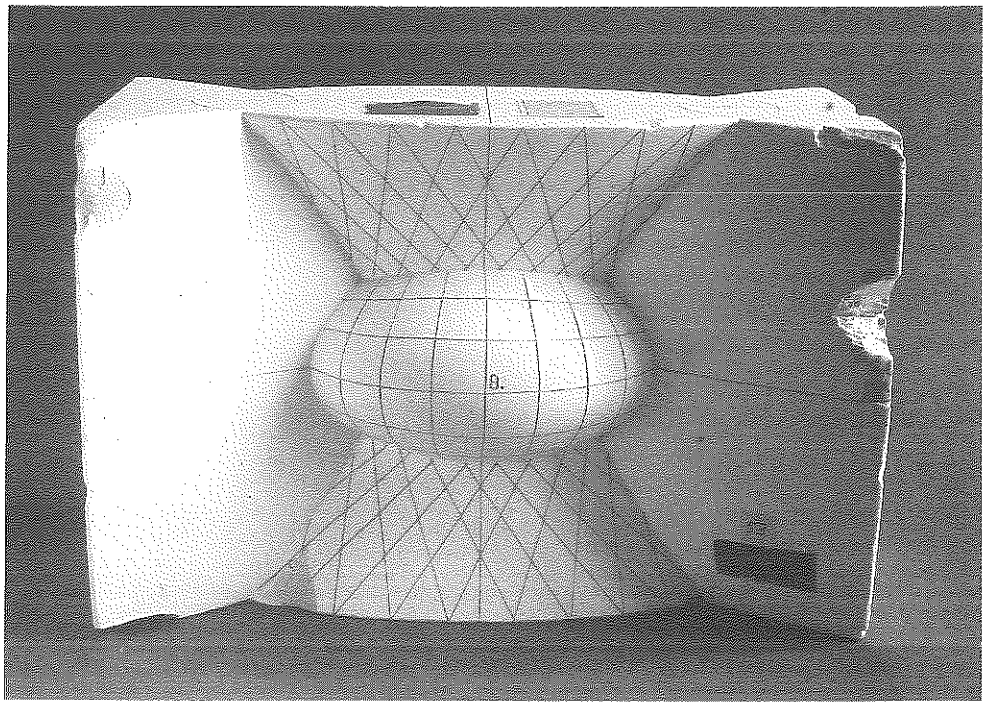

*Figura 55*

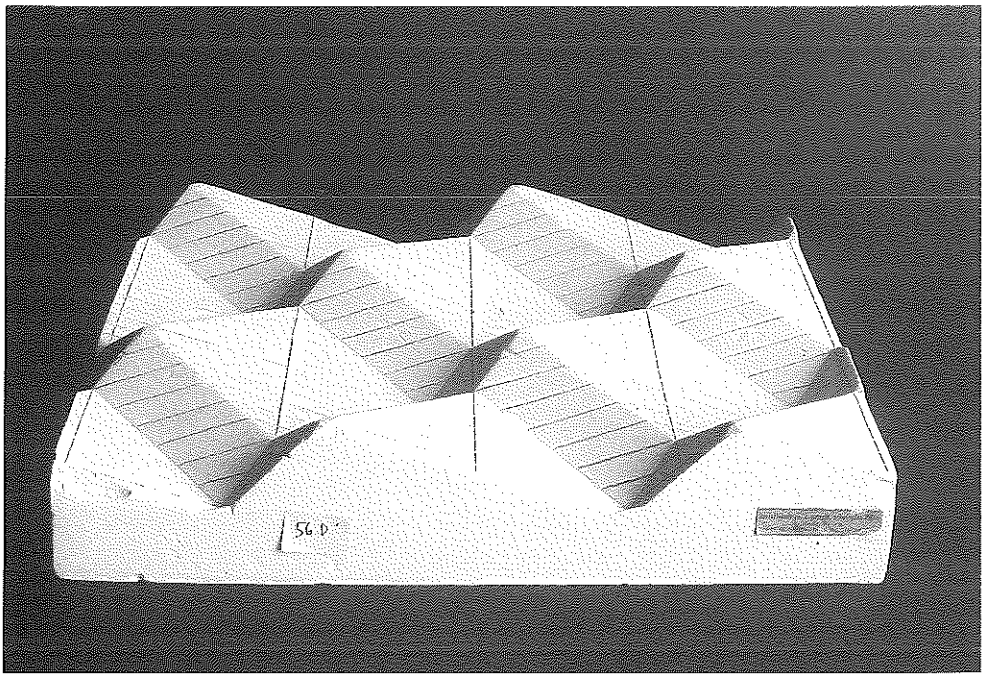

*Figura 56*

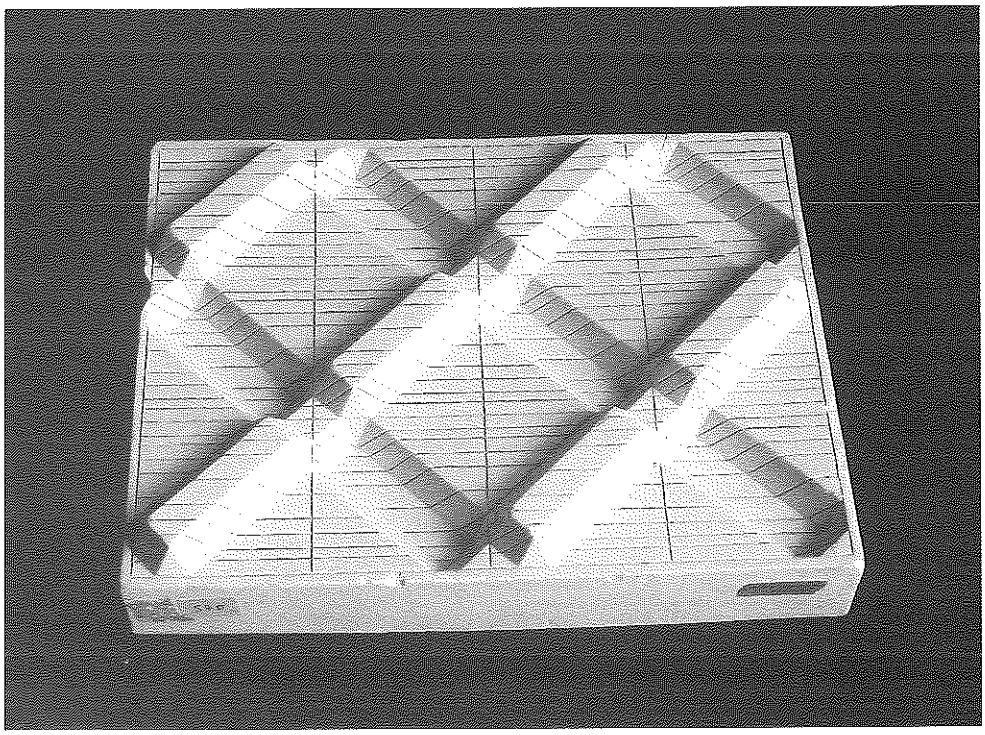

*Figura 57*

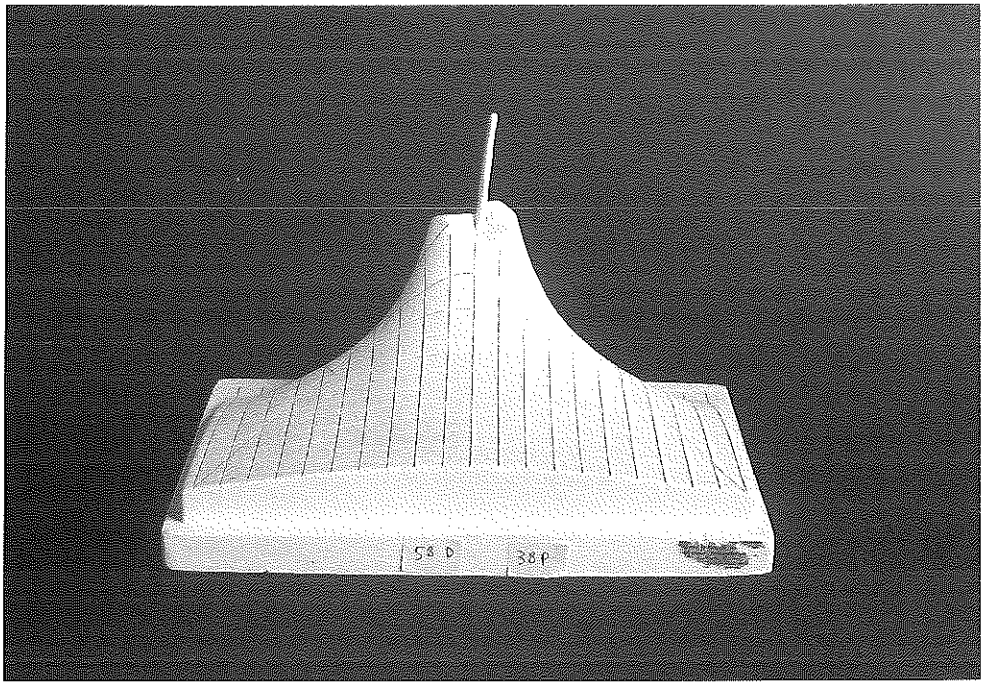

*Figura 58*

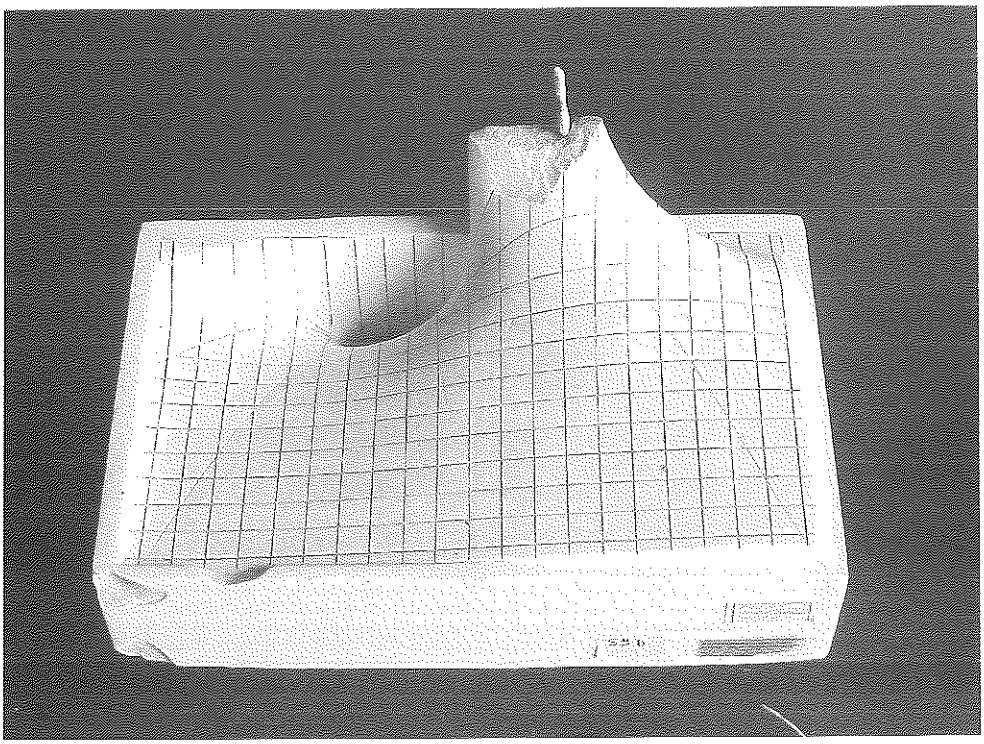

*Figura 59*

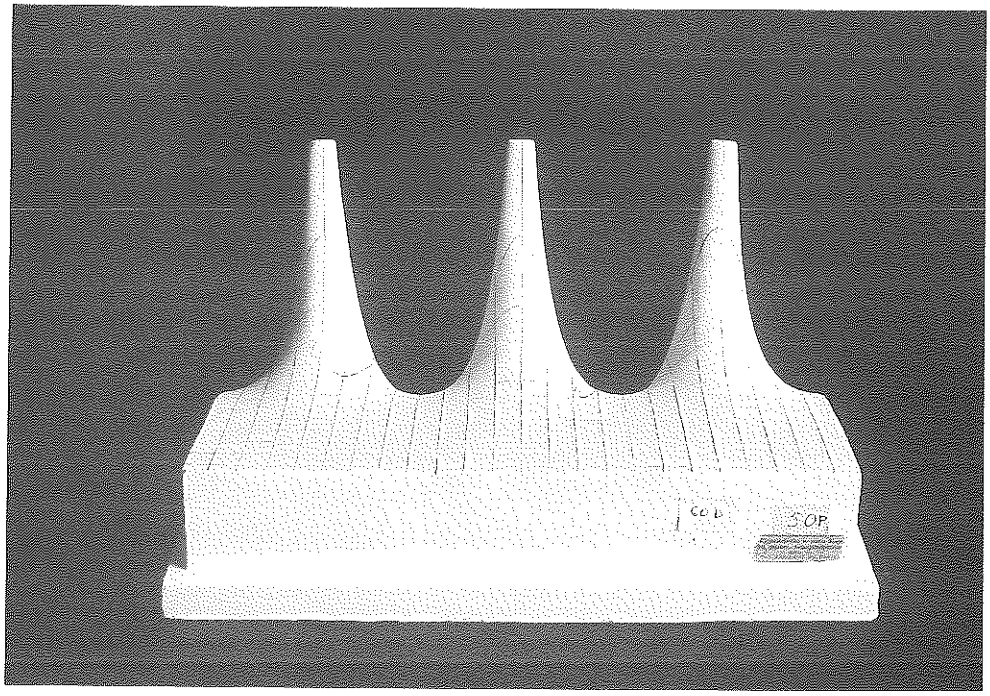

*Figura 60*

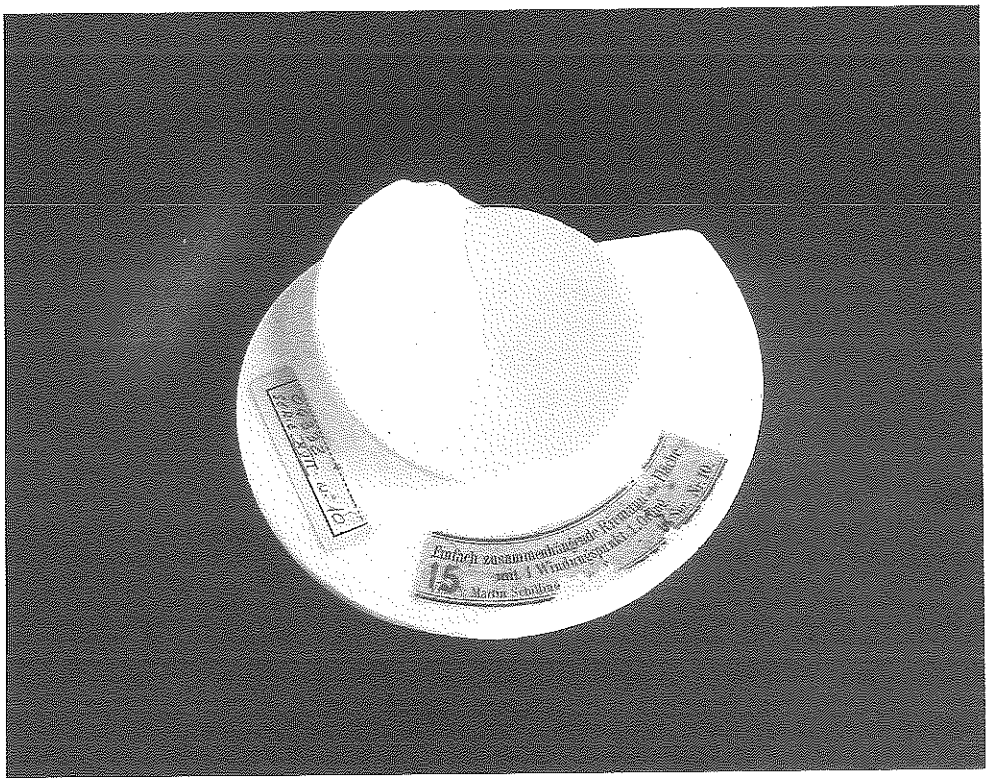

*Figura 61*

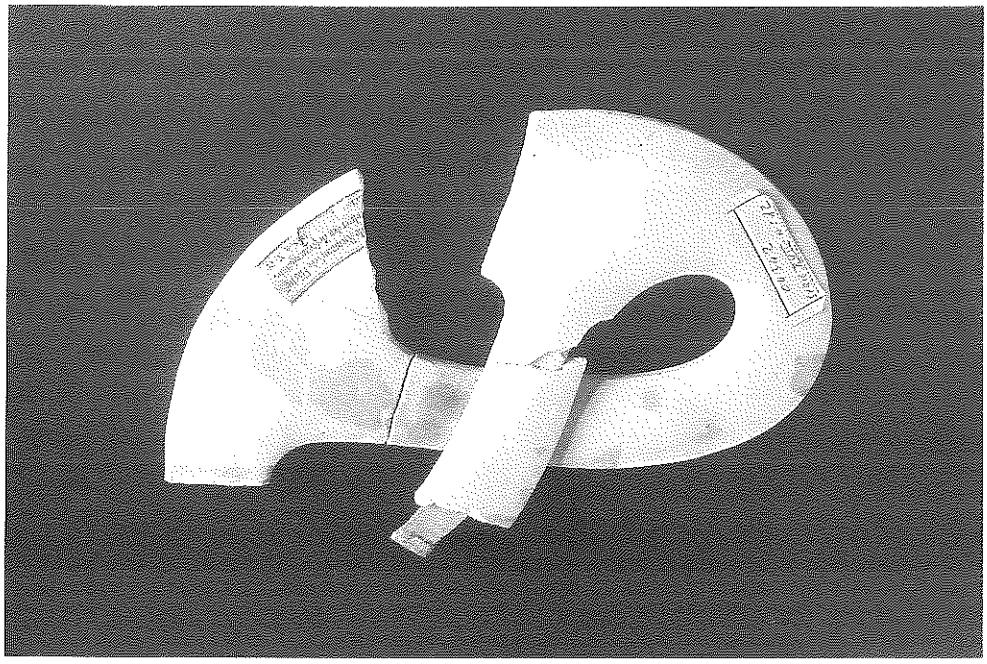

*Figura 62*

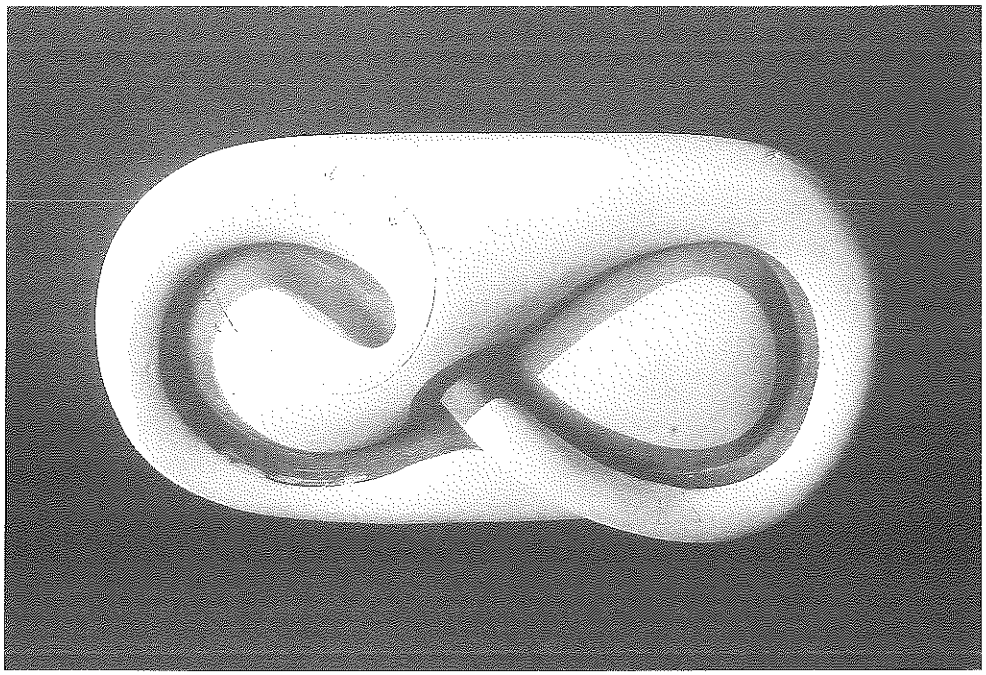

*Figura 63*

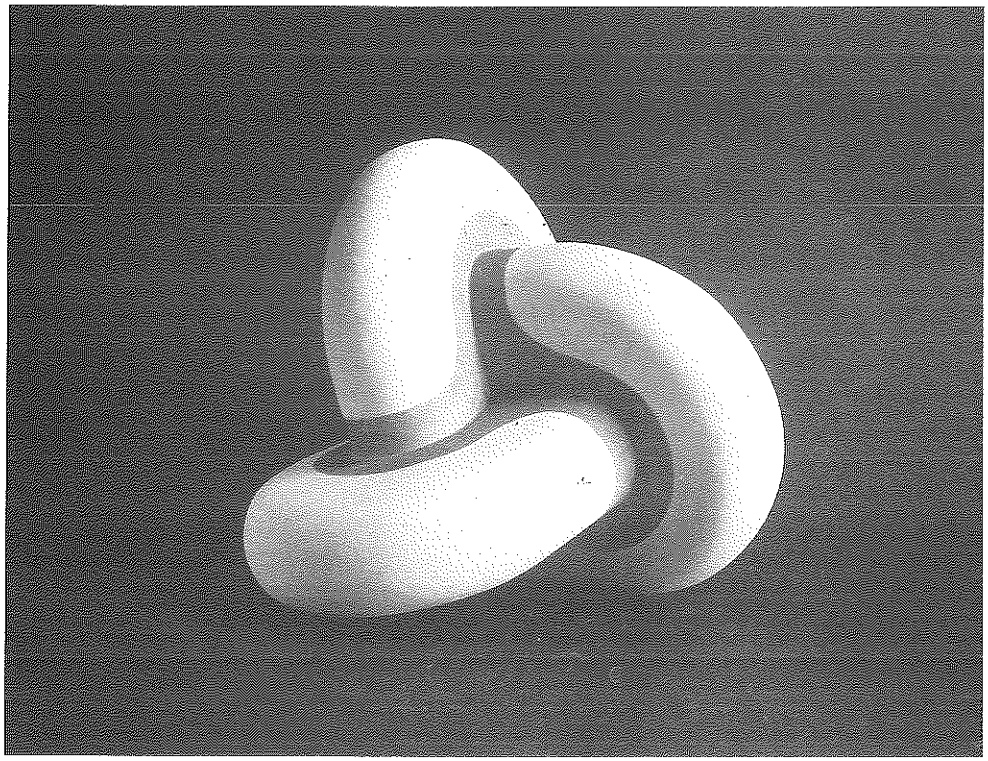

*Figura 64*

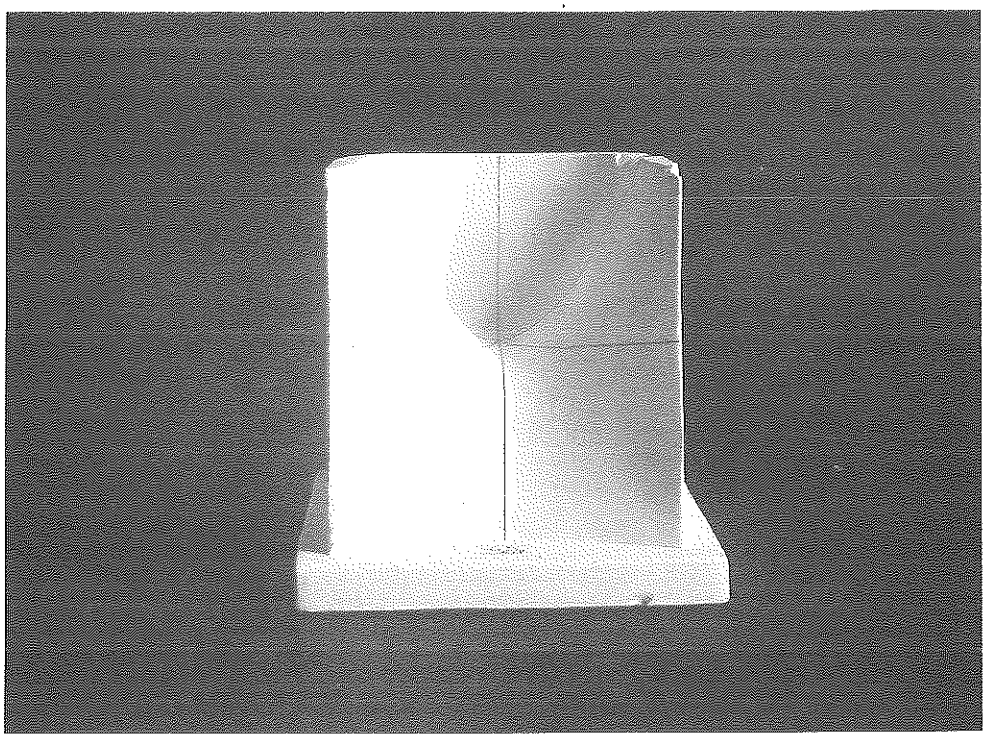

*Figura 65*

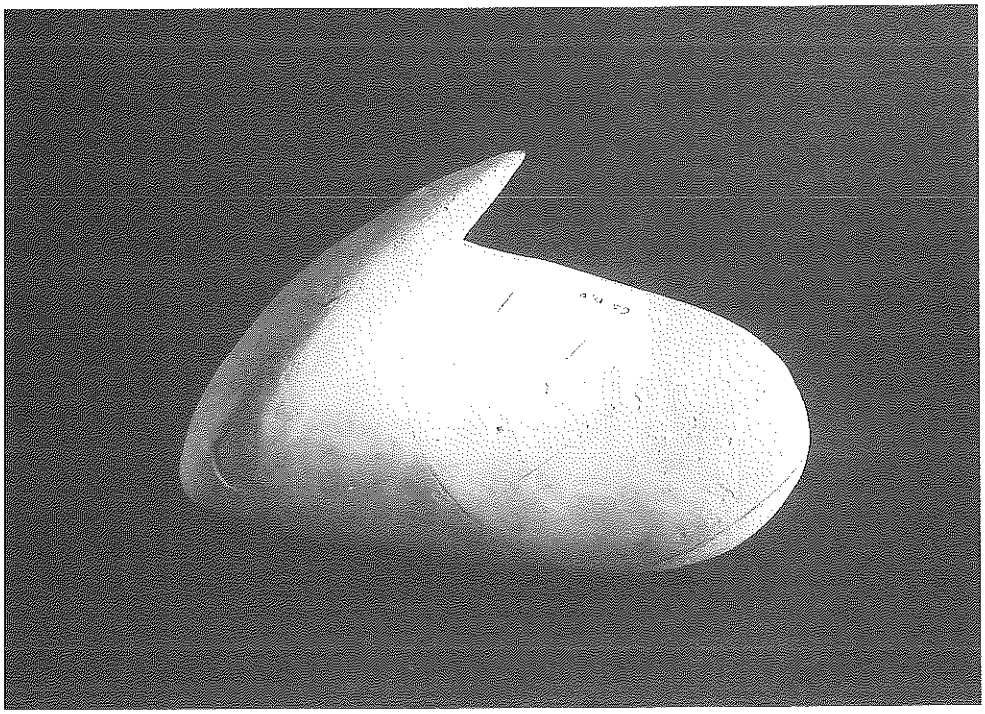

*Figura 66*

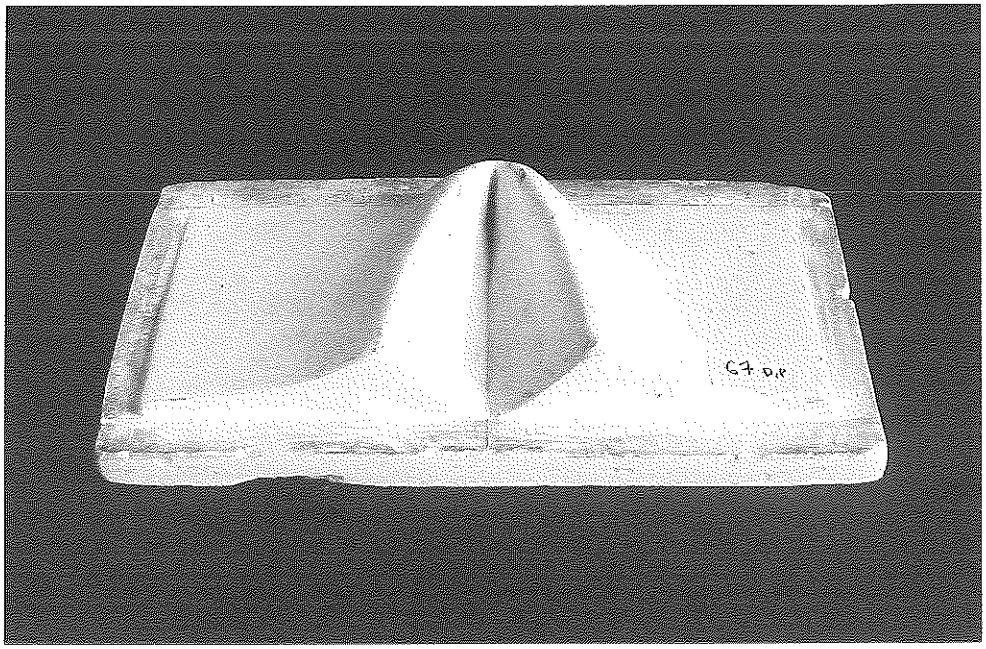

*Figura 67*

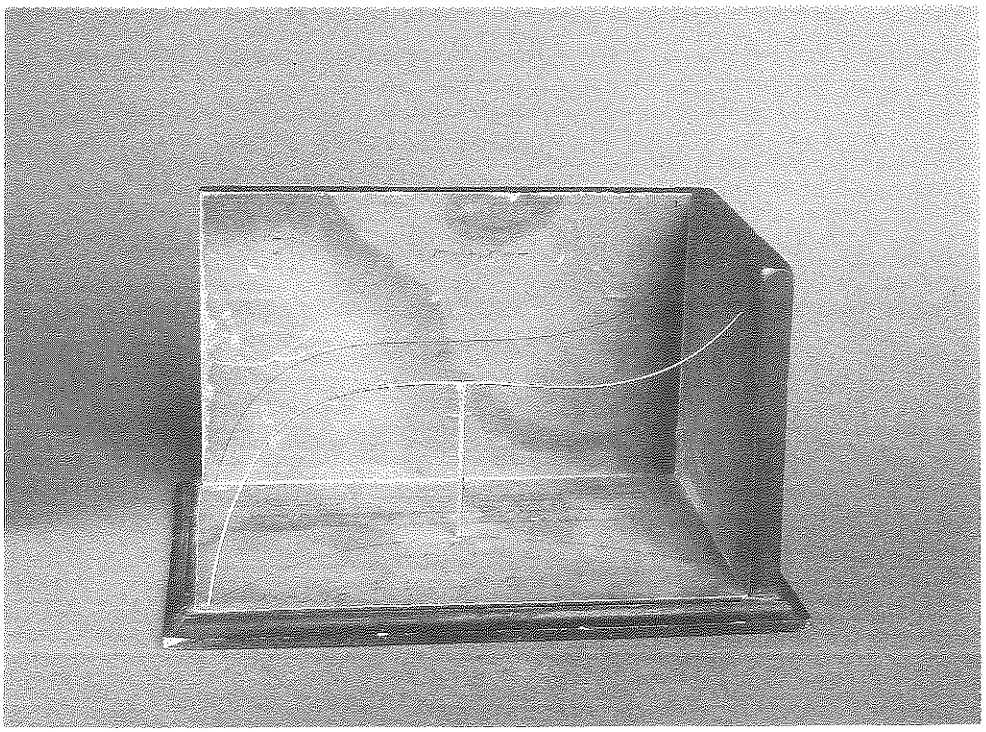

*Figura 68*

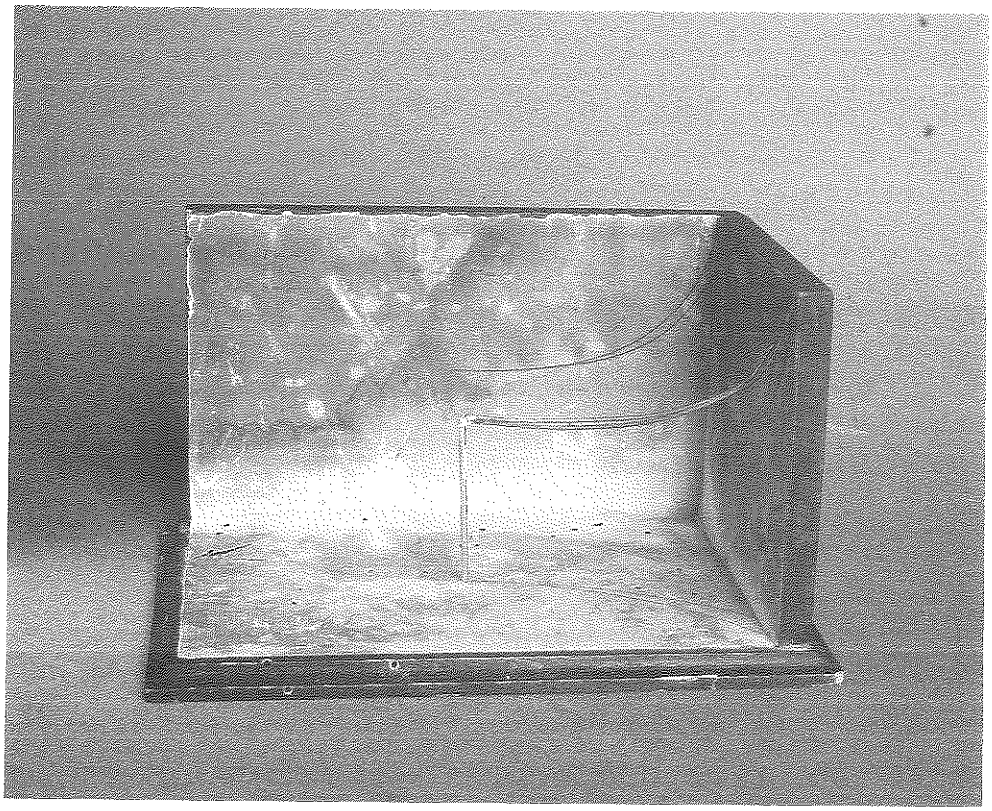

*Figura 69*

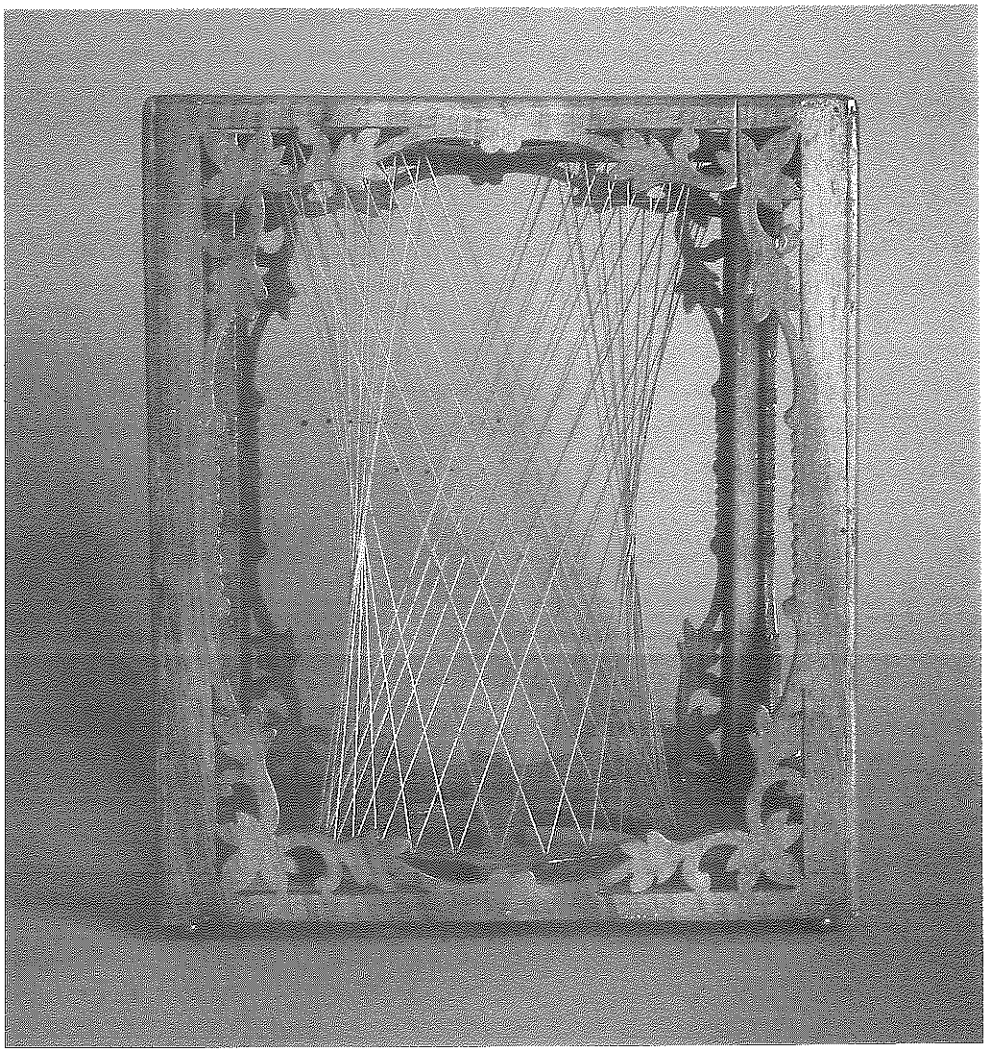

*Figura 70*

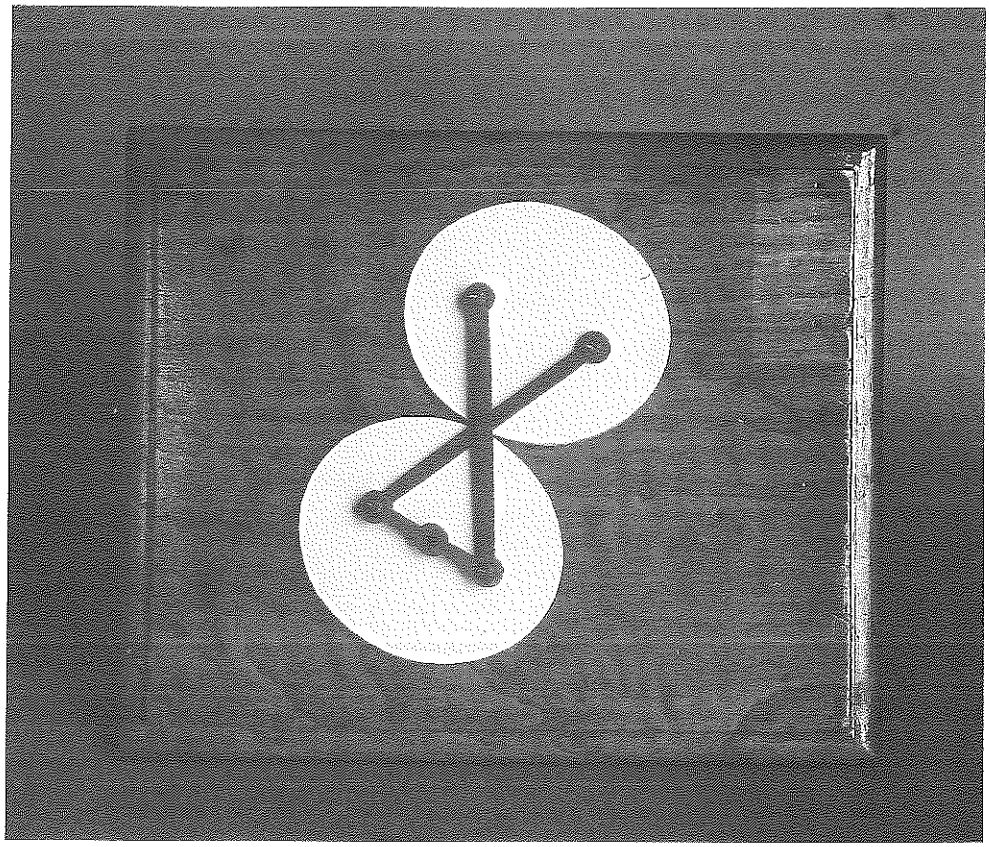

*Figura 71*

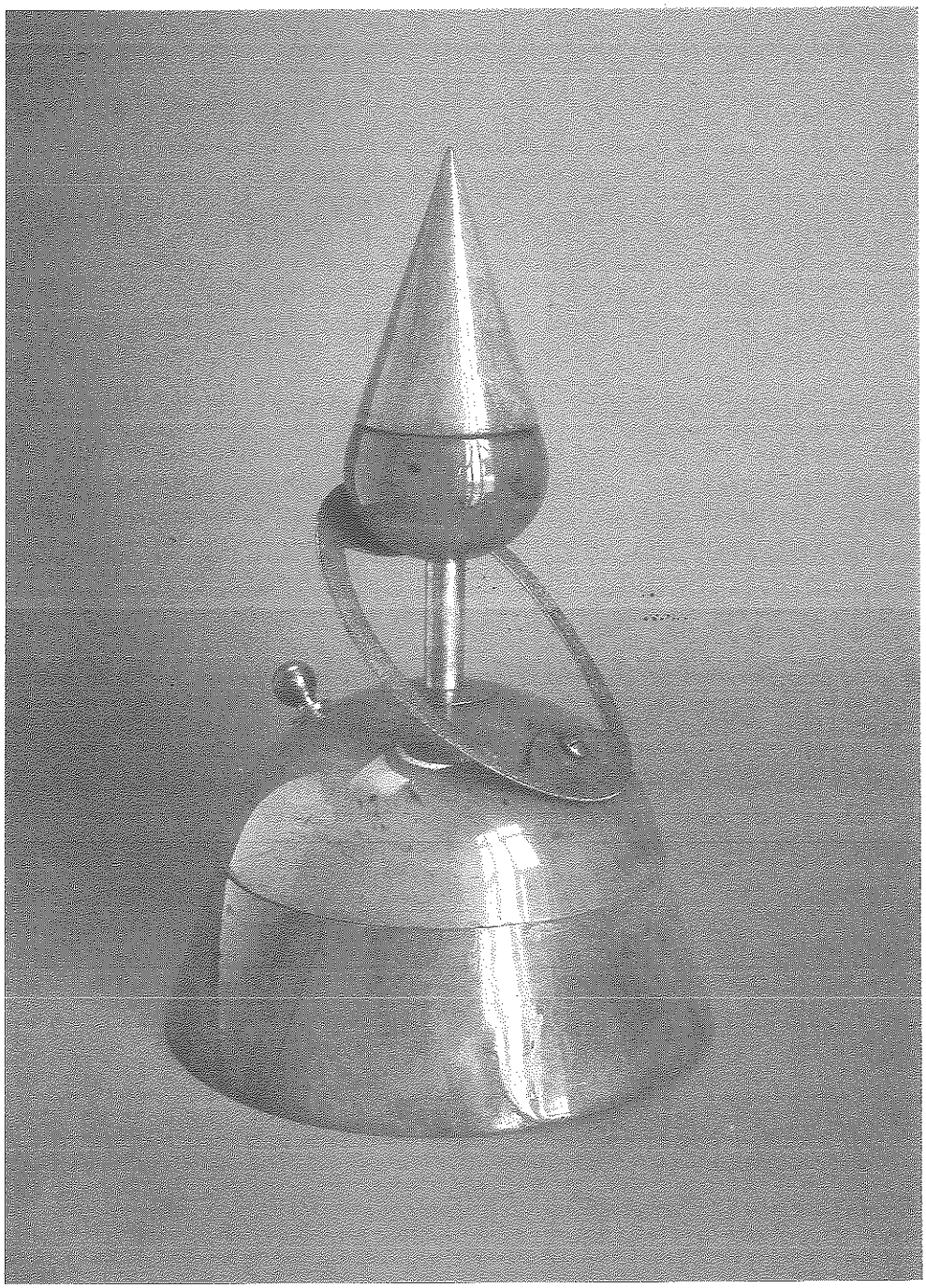

*Figura 72*

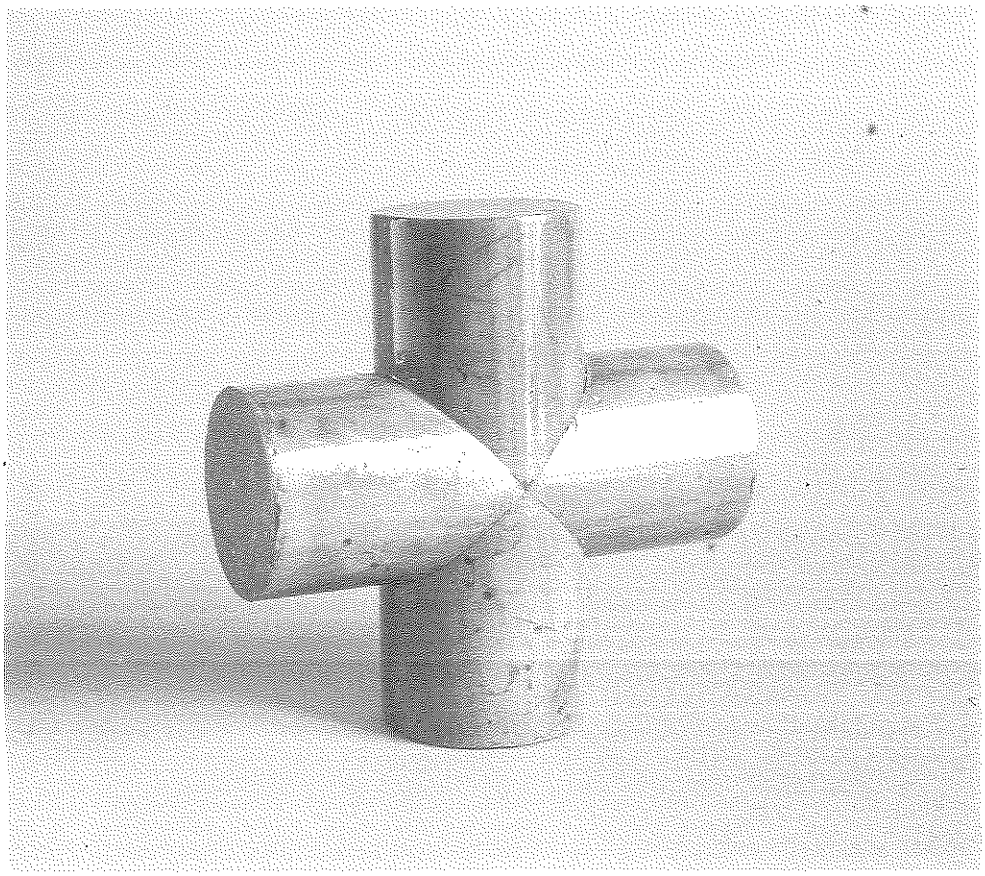

*Figura 73*

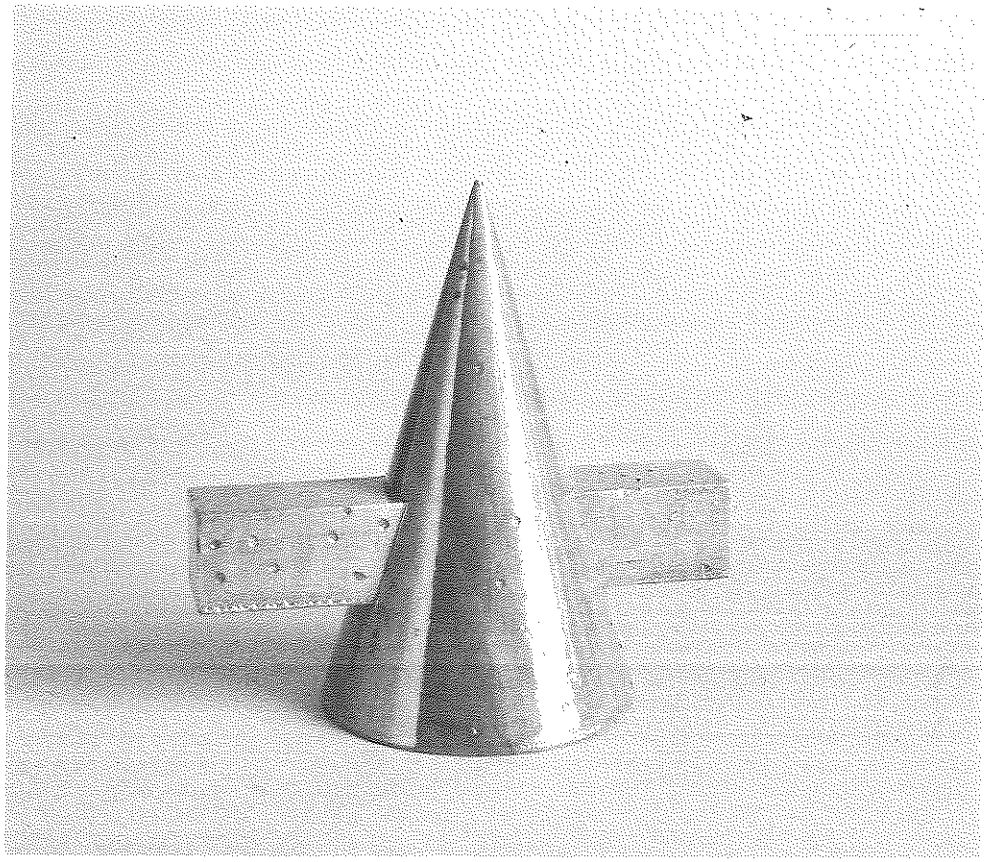

*Figura 74*

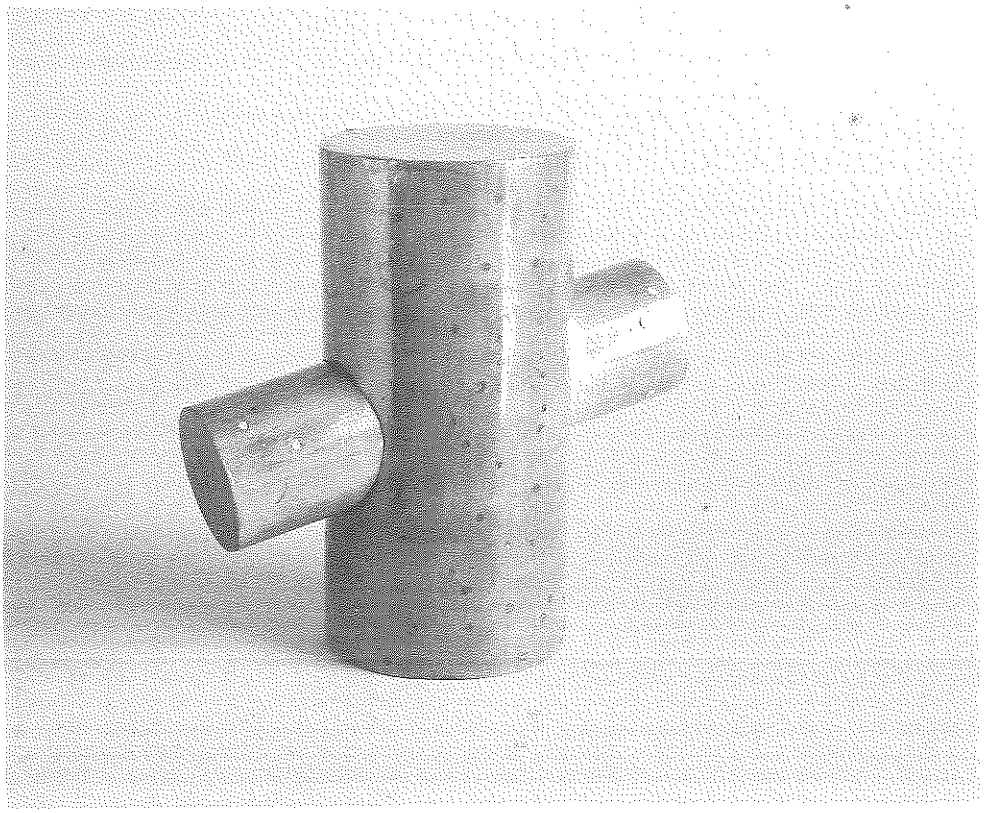

*Figura 75*

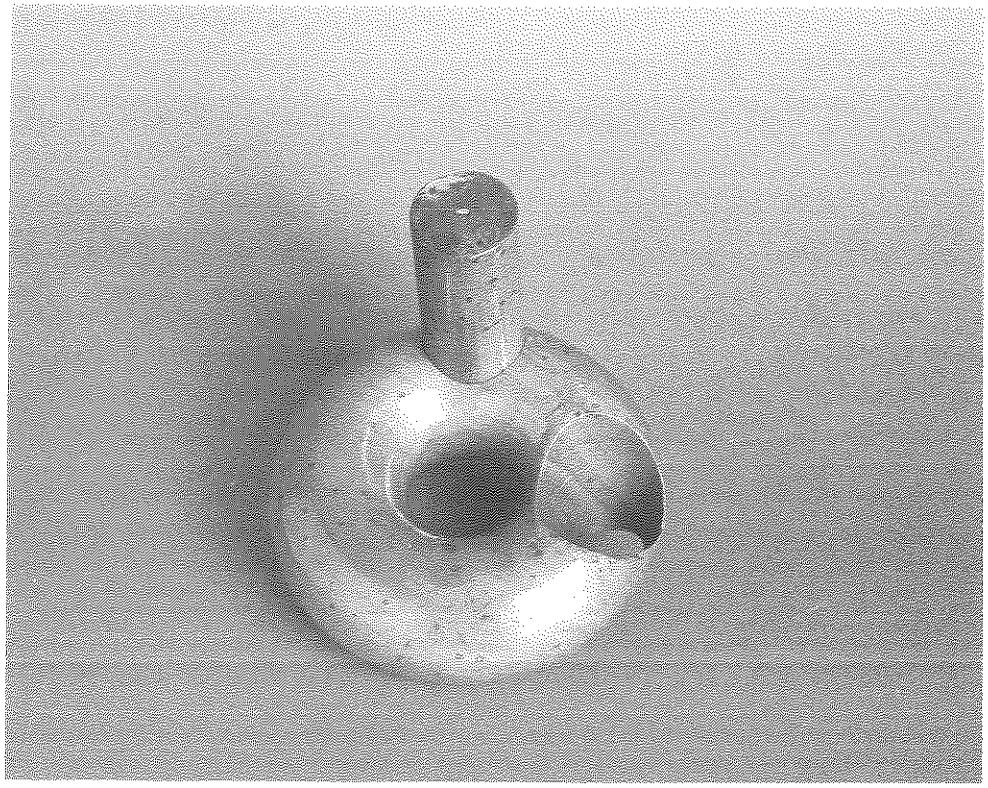

*Figura 76*

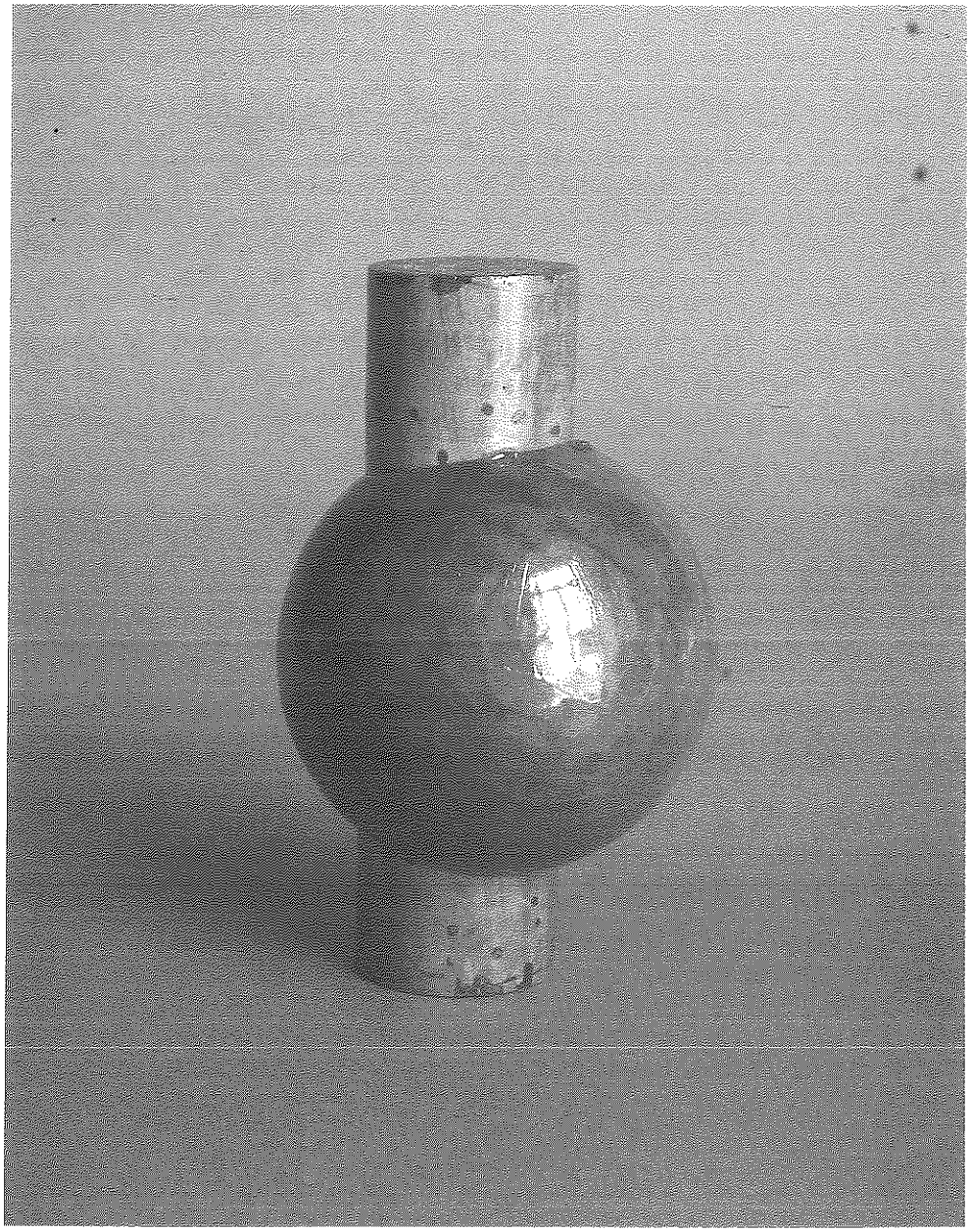

*Figura 77*

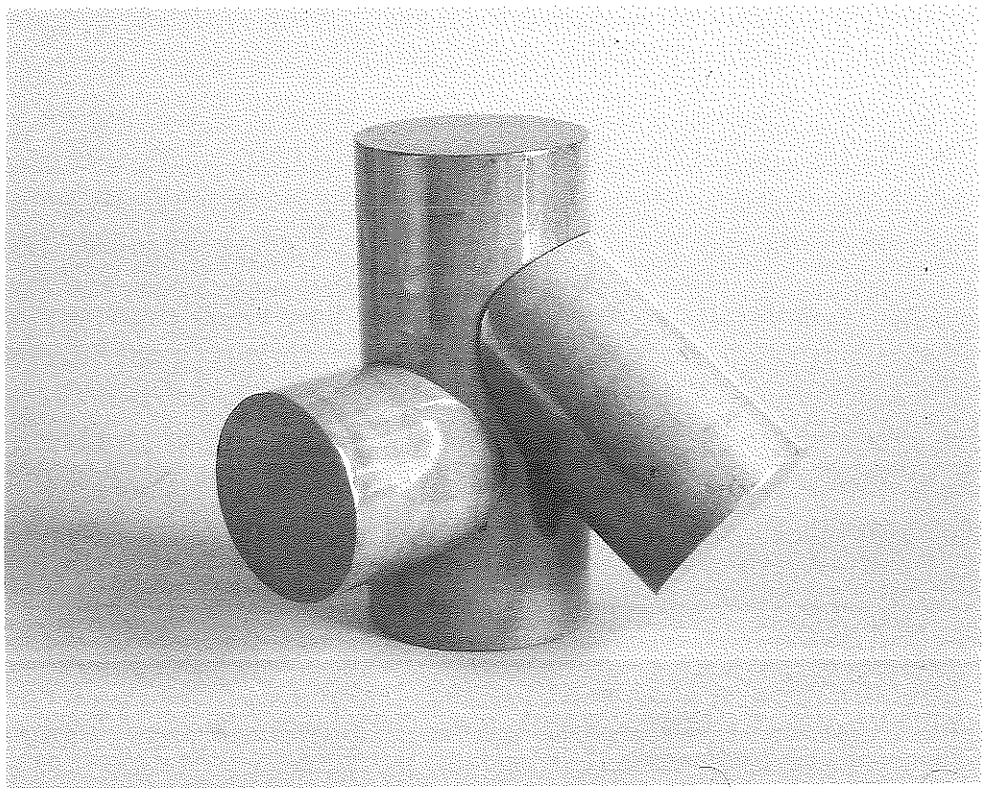

*Figura 78*

*Figura 79*

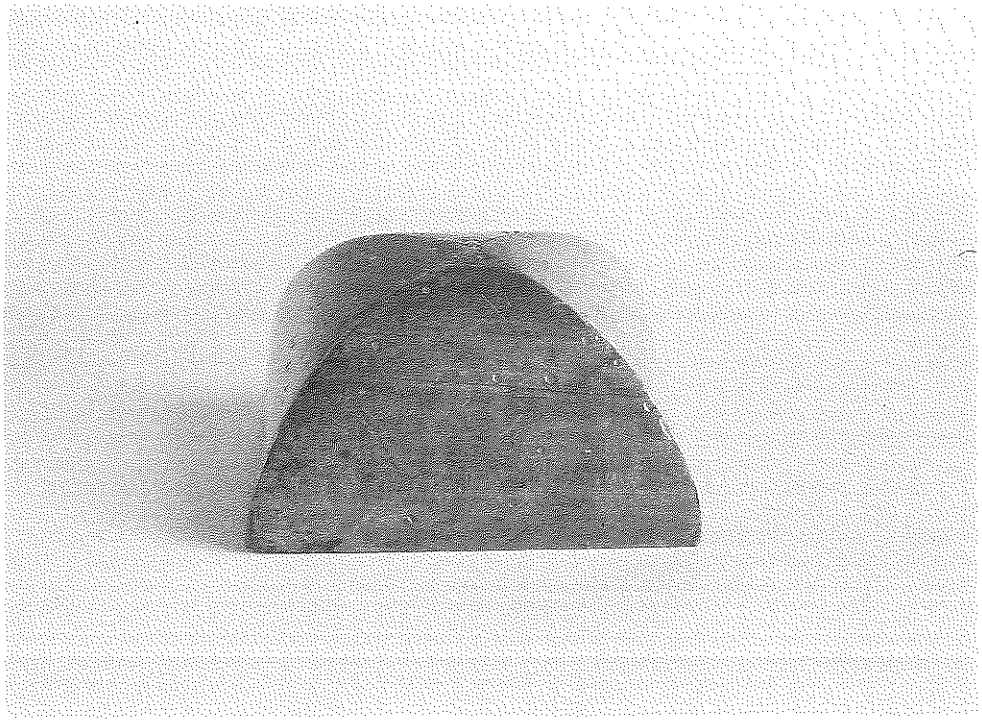

*Figura 80*

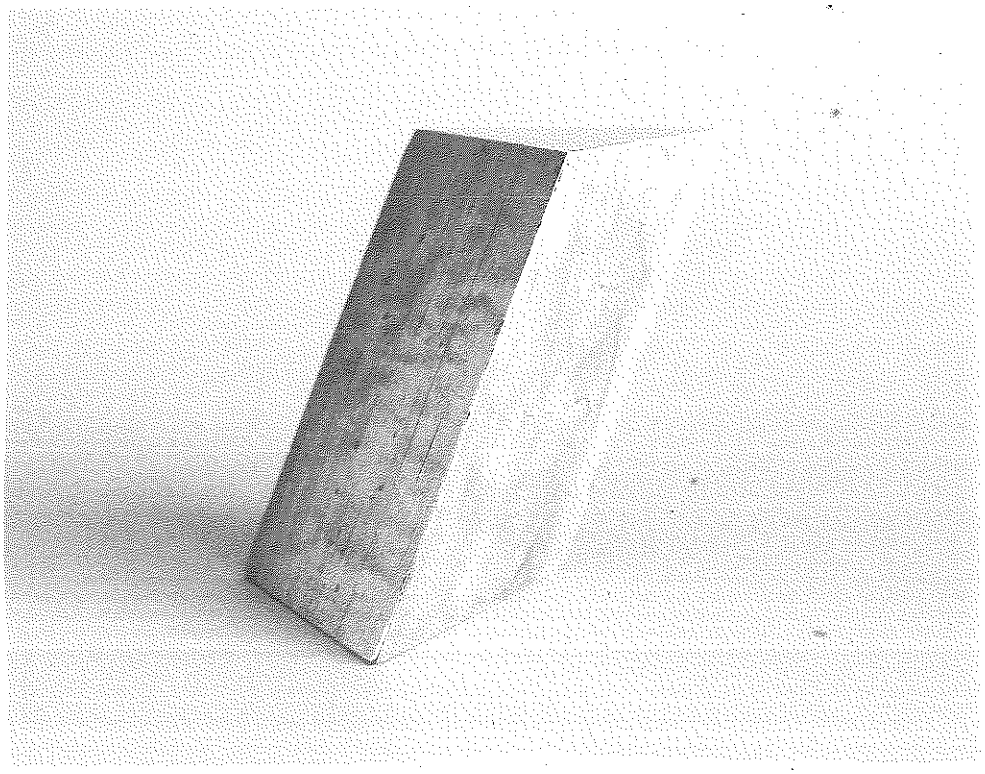

*Figura 81*

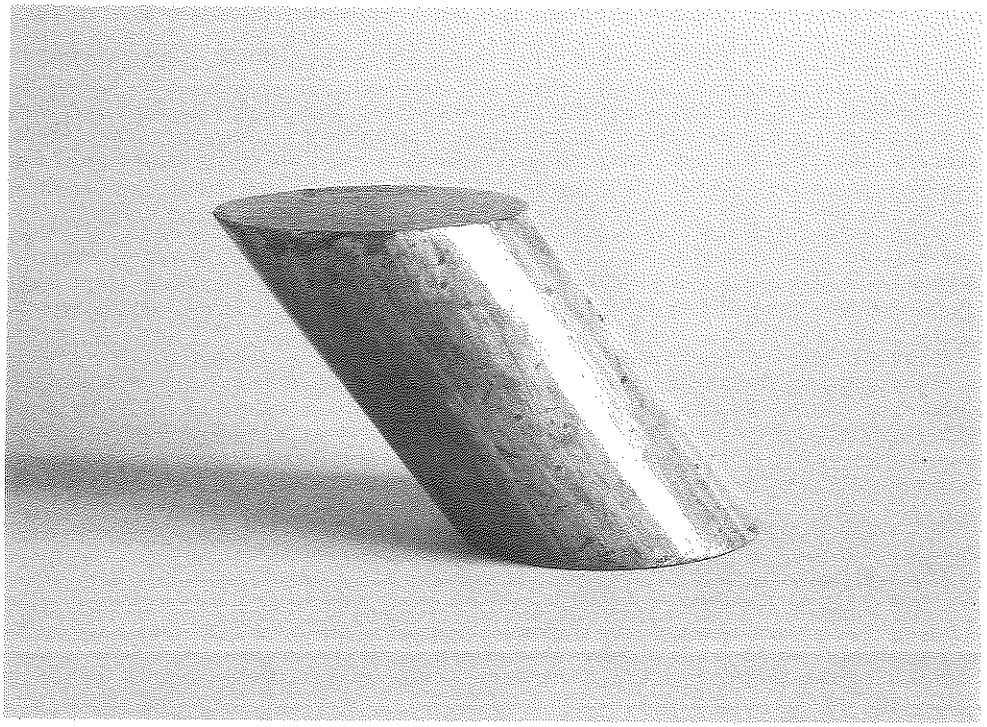

*Figura 82*

*Figura 83*

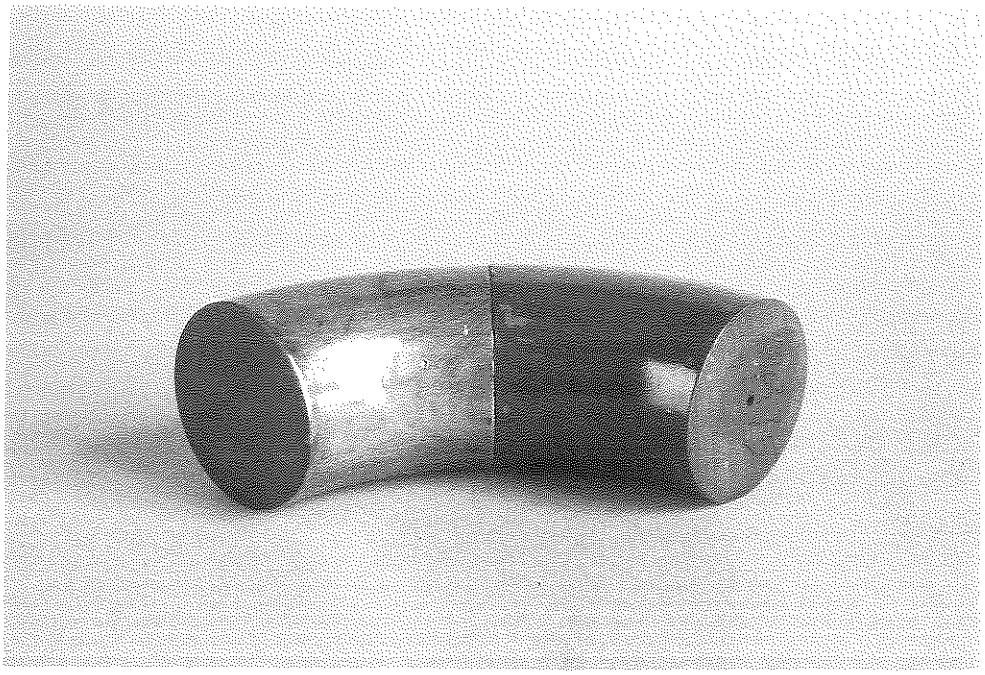

*Figura 84*

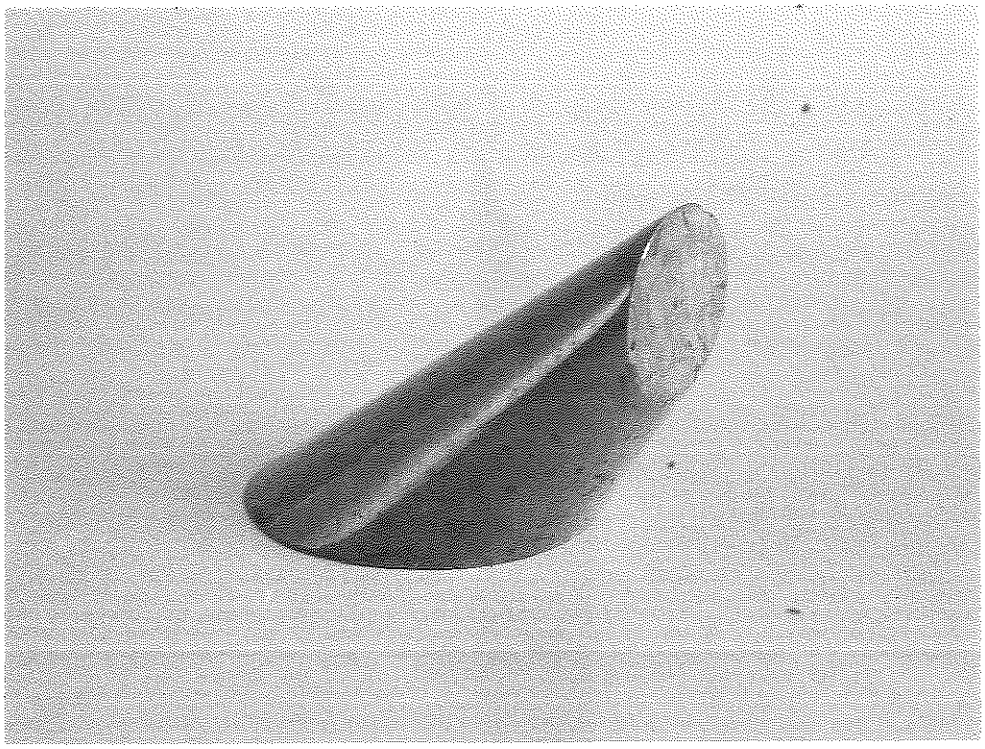

*Figura 85*

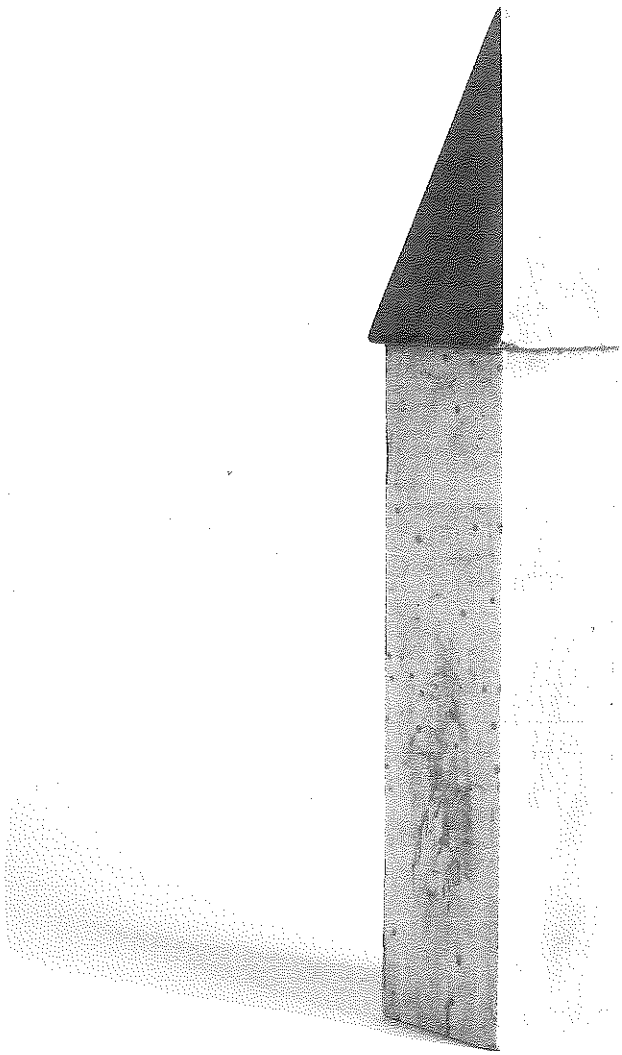

*Figura 86*

*Figura 87*

*Figura 88*

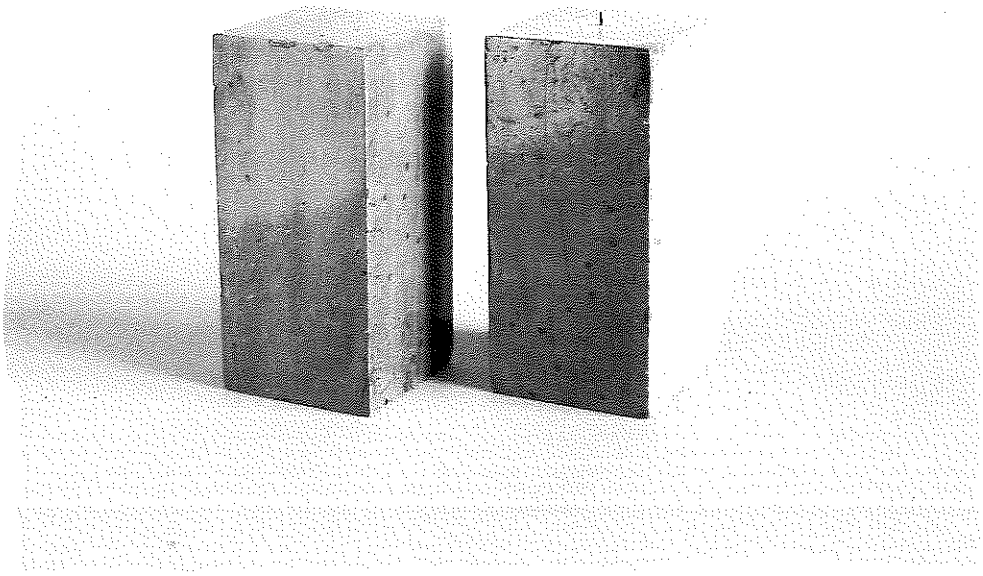

*Figura 89*

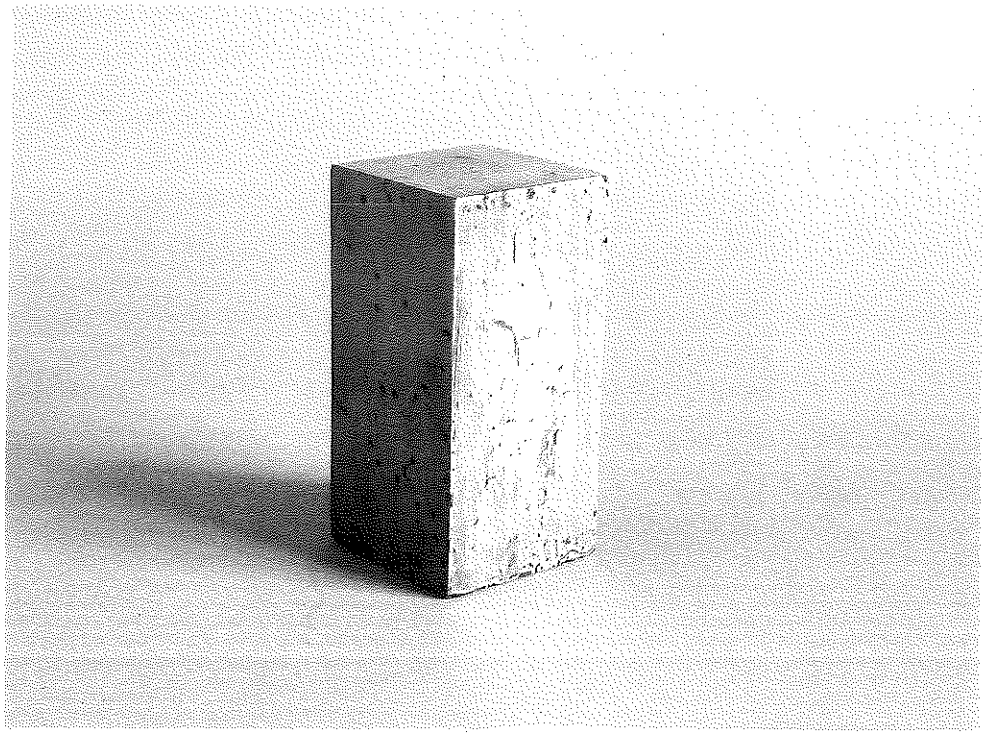

*Figura 90*

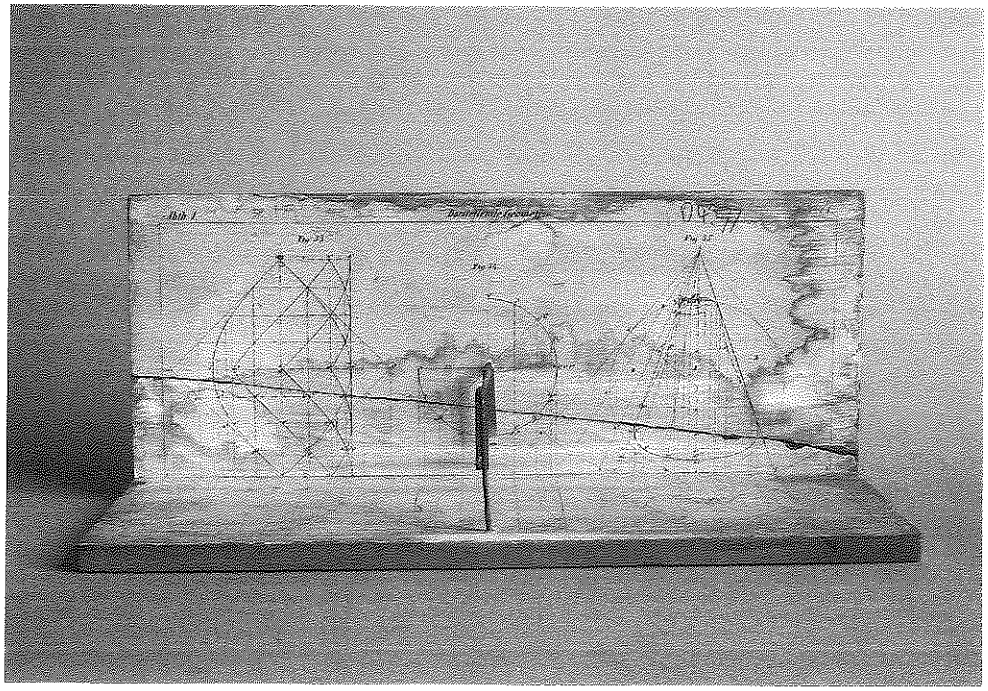

*Figura 91*

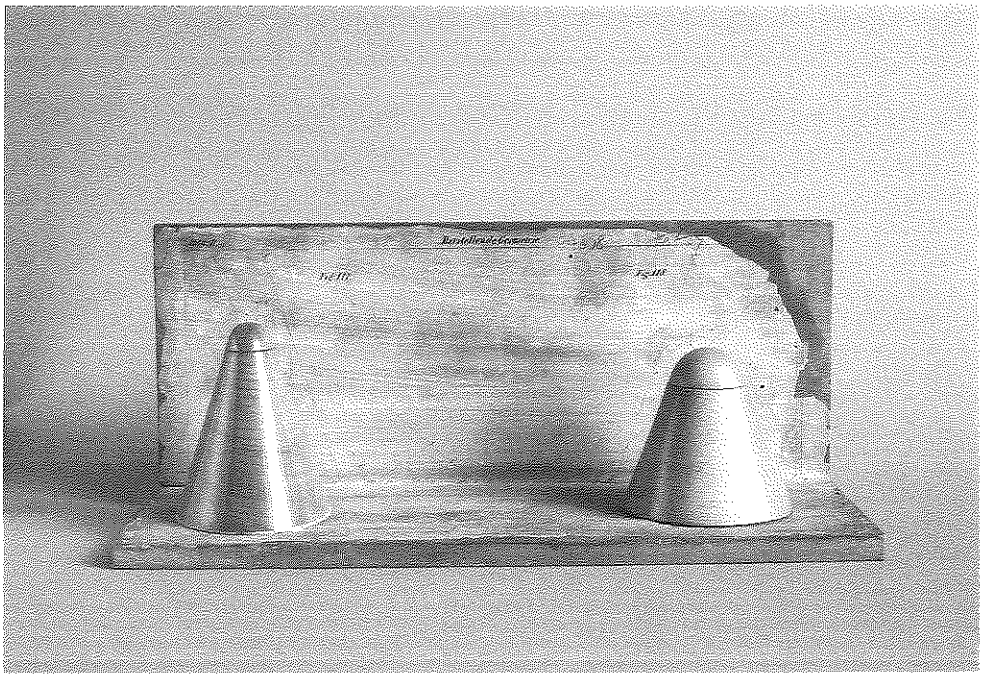

*Figura 92*

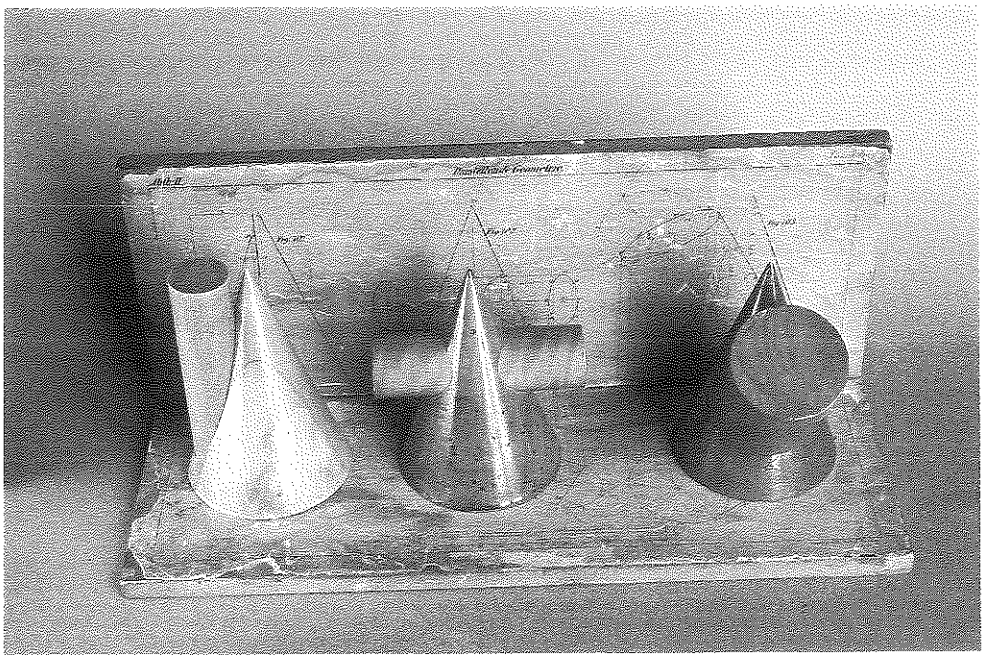

*Figura 93*

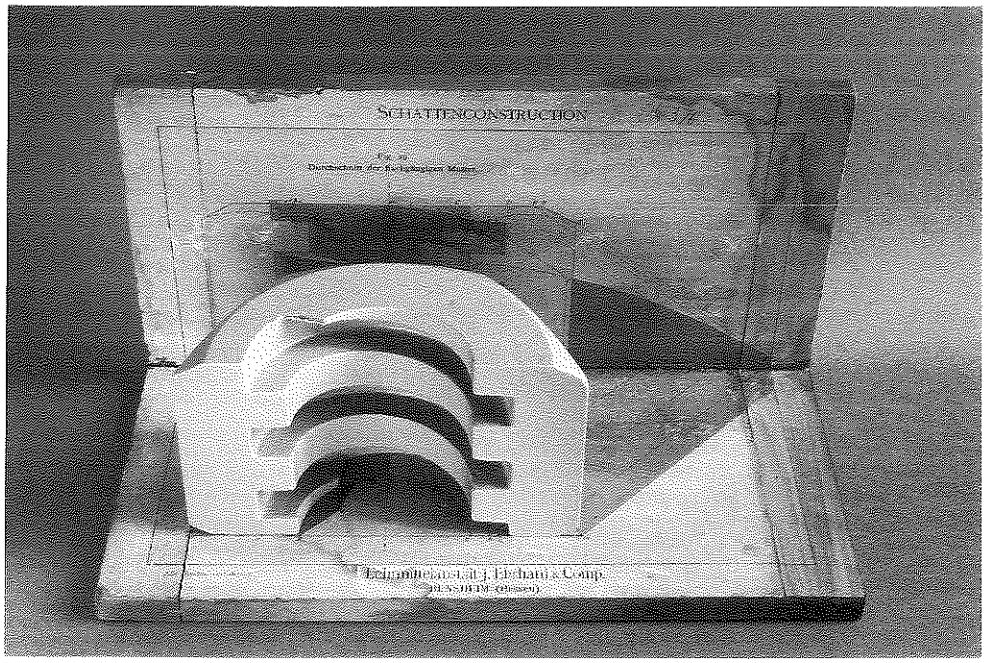


*Figura 94*

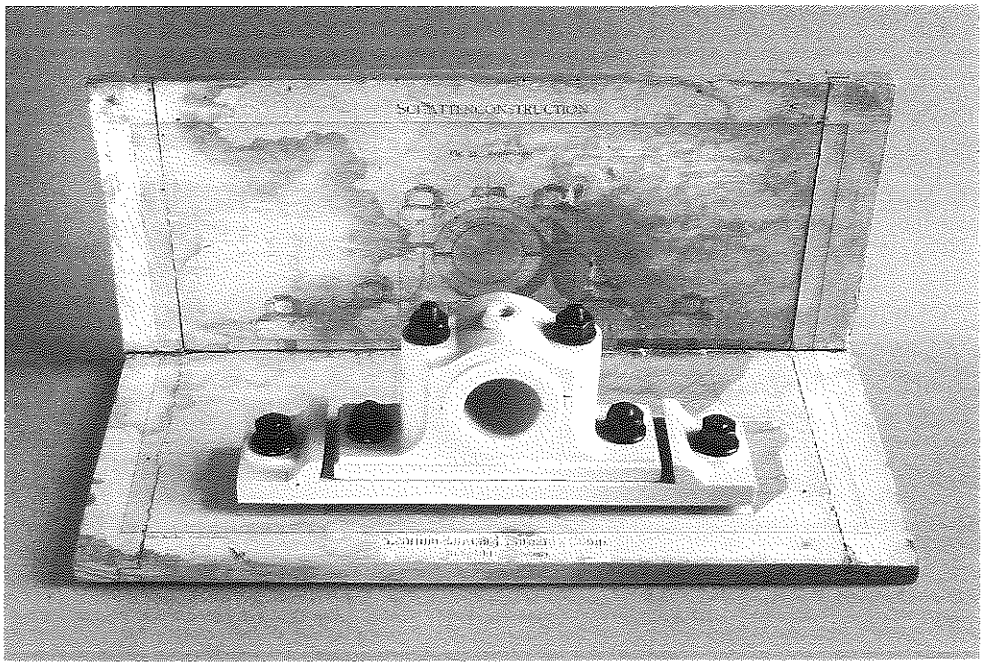

*Figura 95*

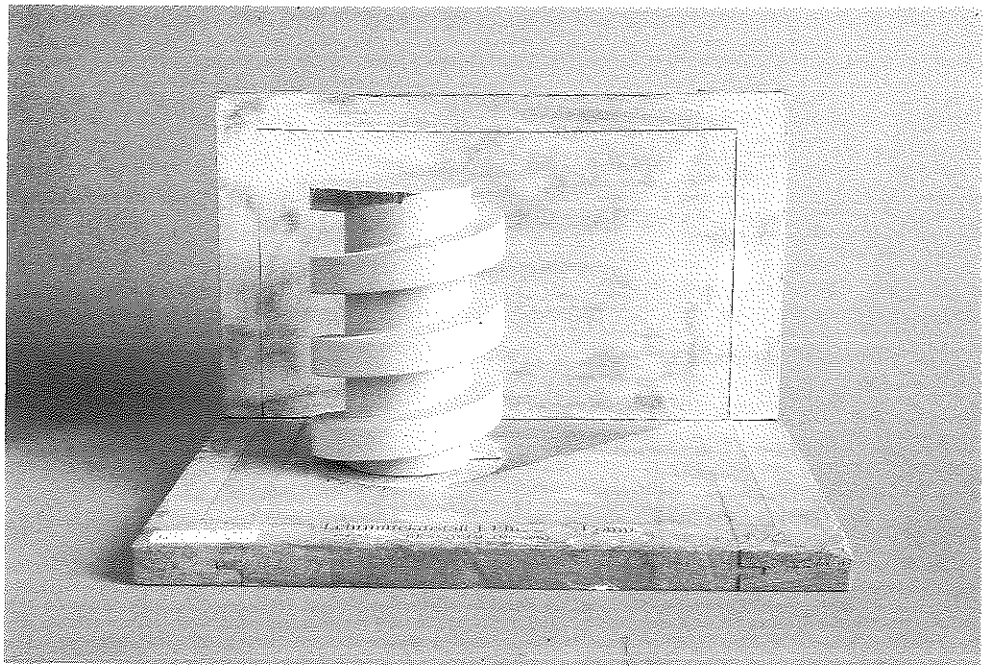

*Figura 96*

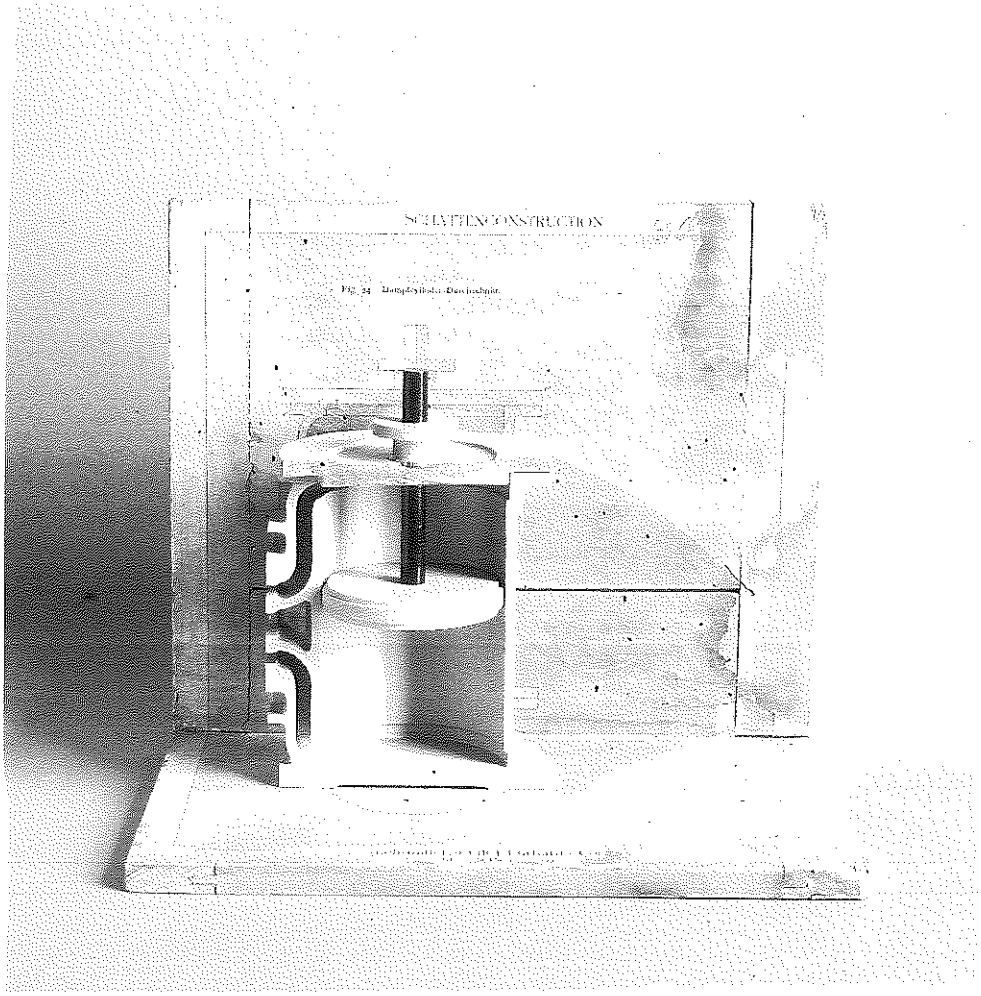


*Figura 97*

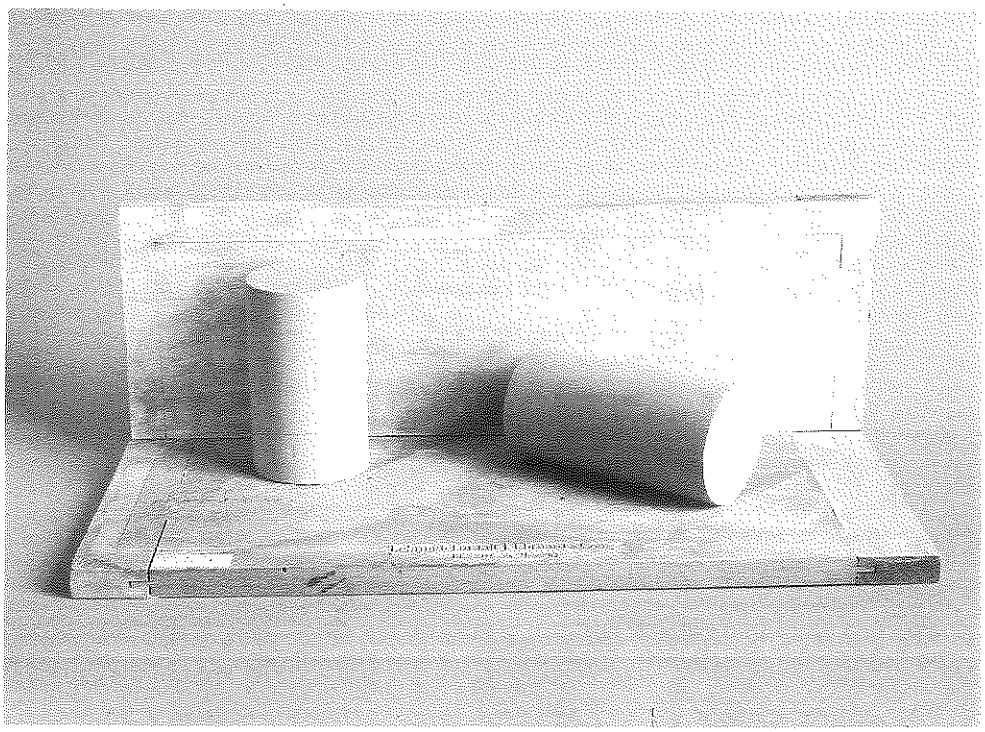

*Figura 98*

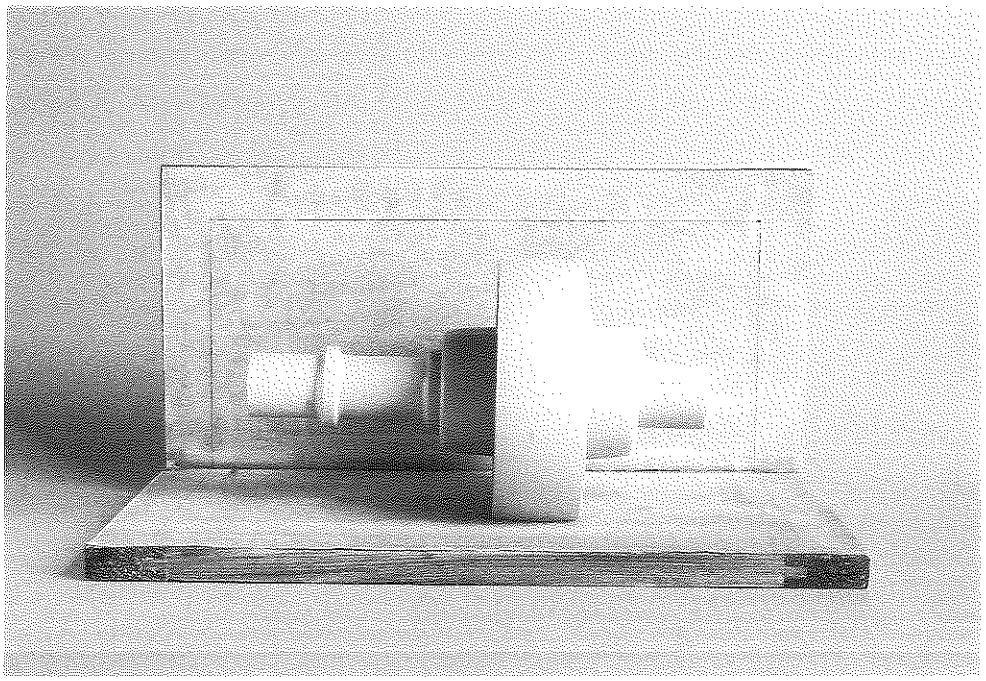

*Figura 99*

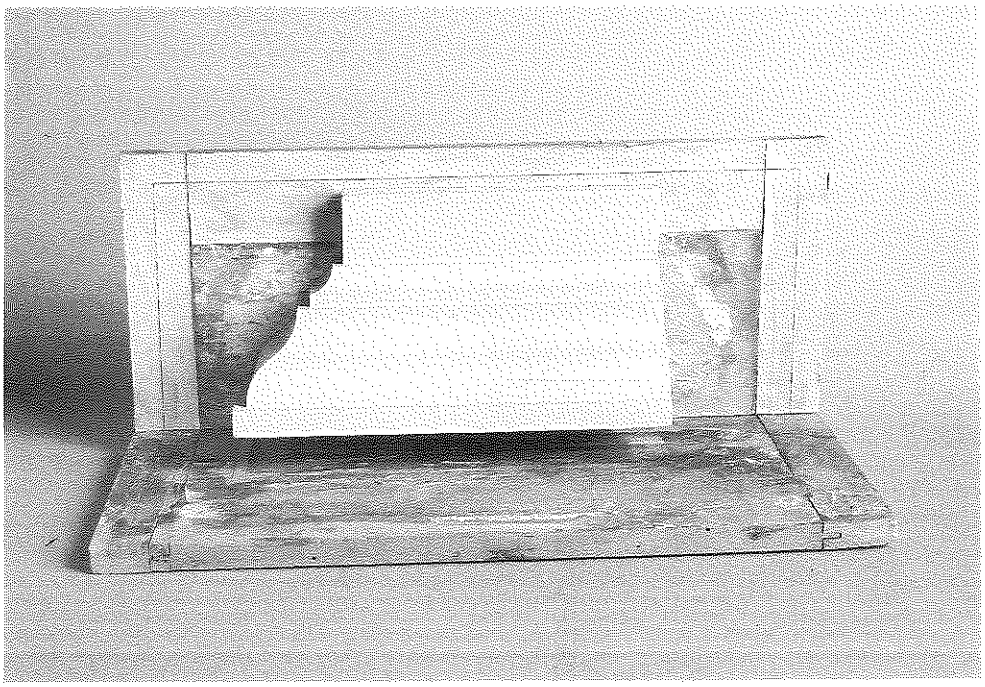

*Figura 100*

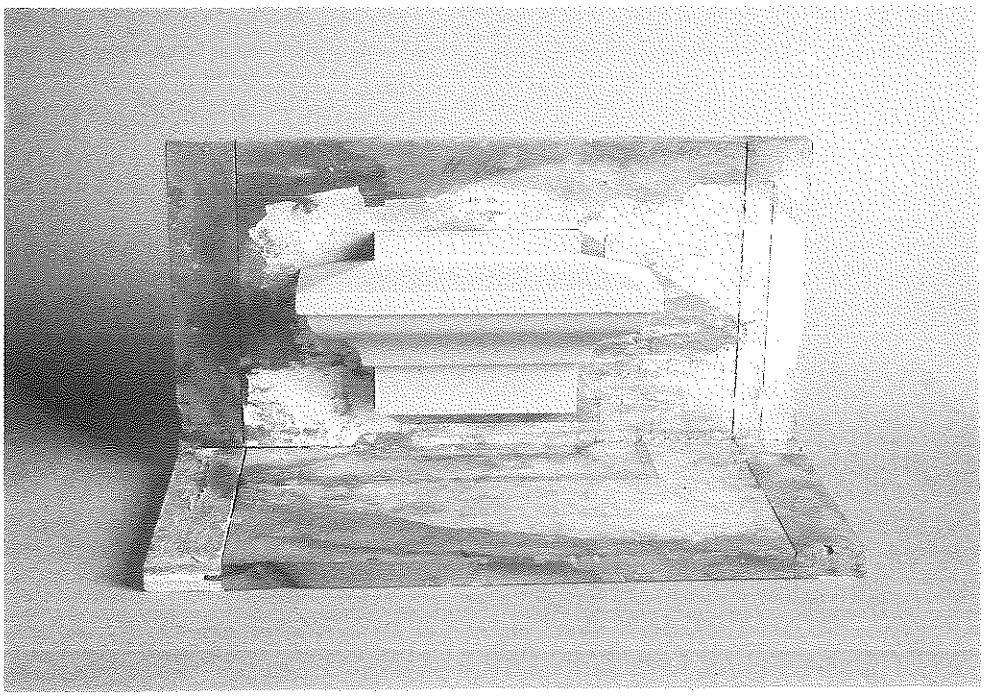

*Figura 101*

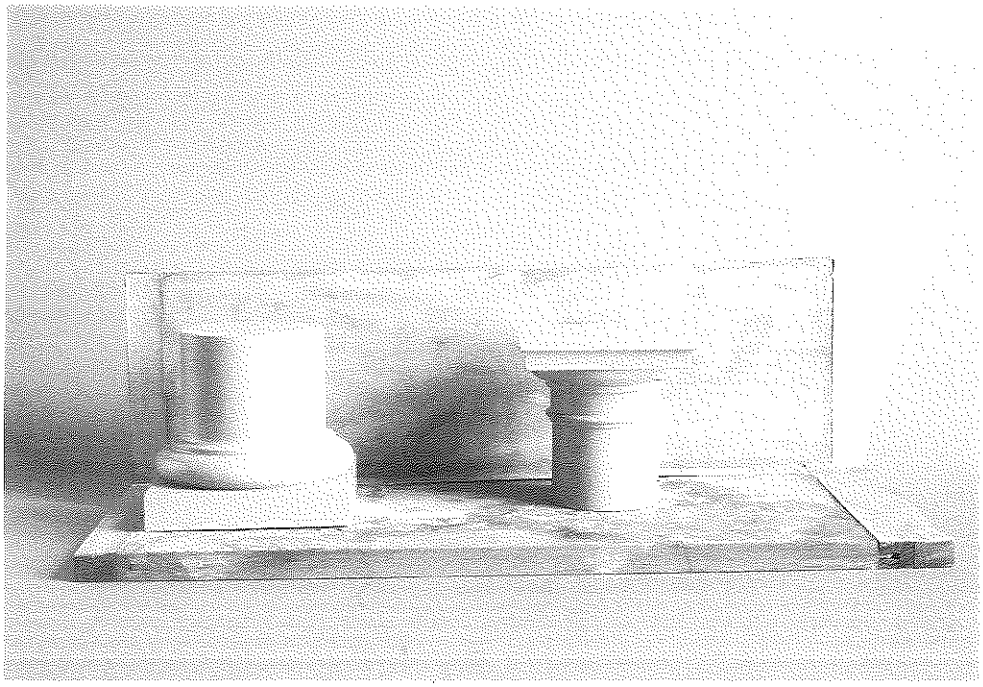

*Figura 102*

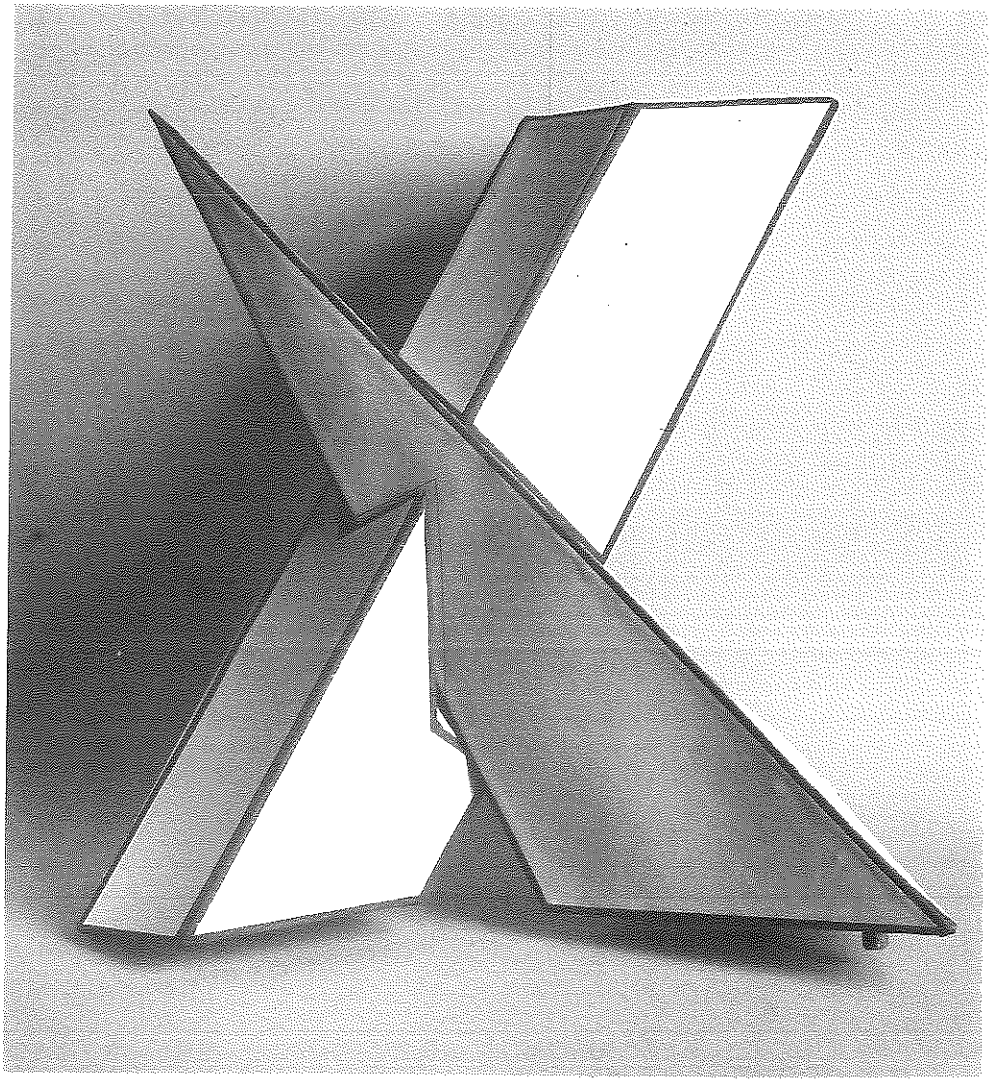

*Figura 103*

*Figura 104*

*Figura 105*

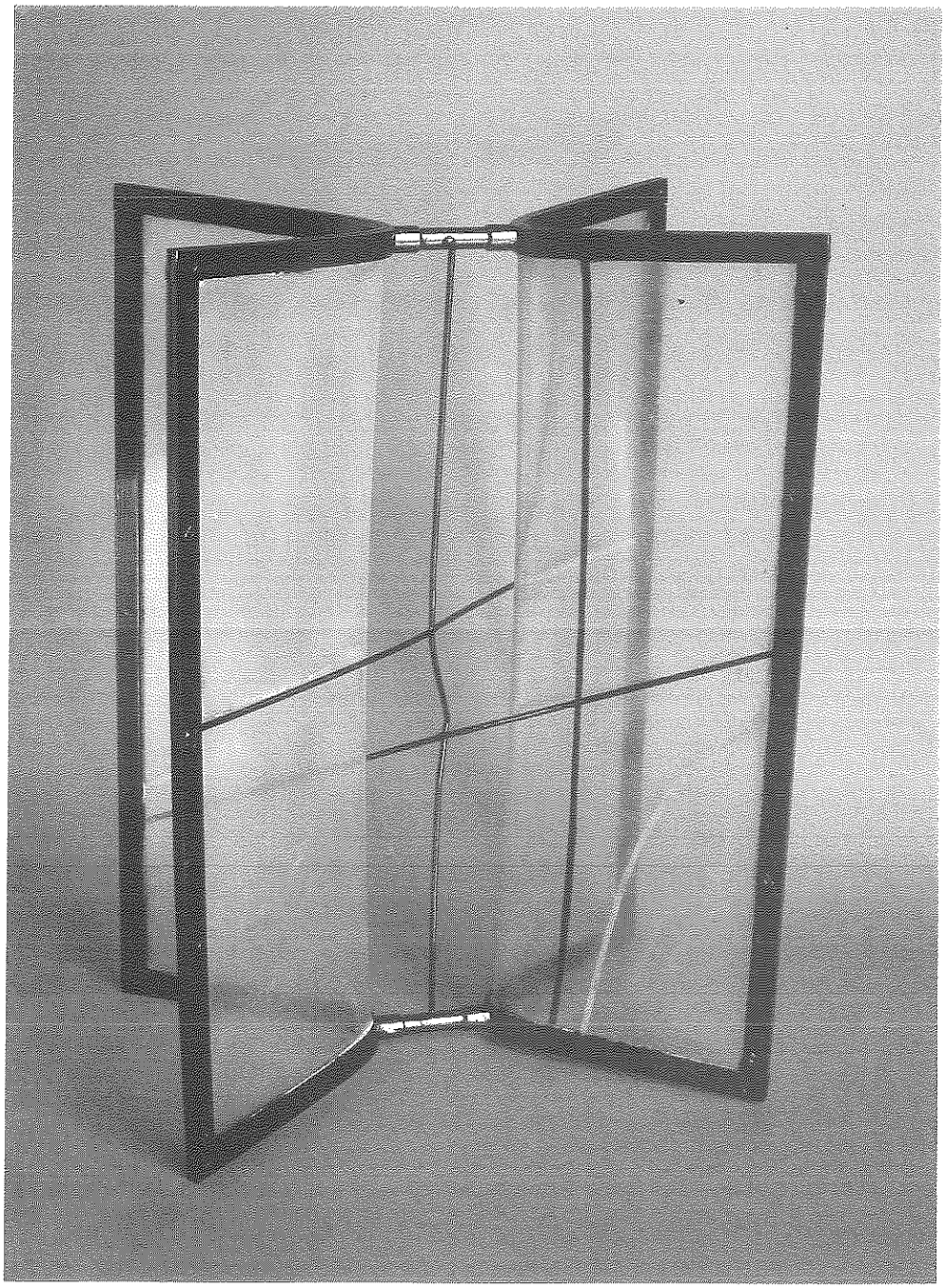

*Figura 106*

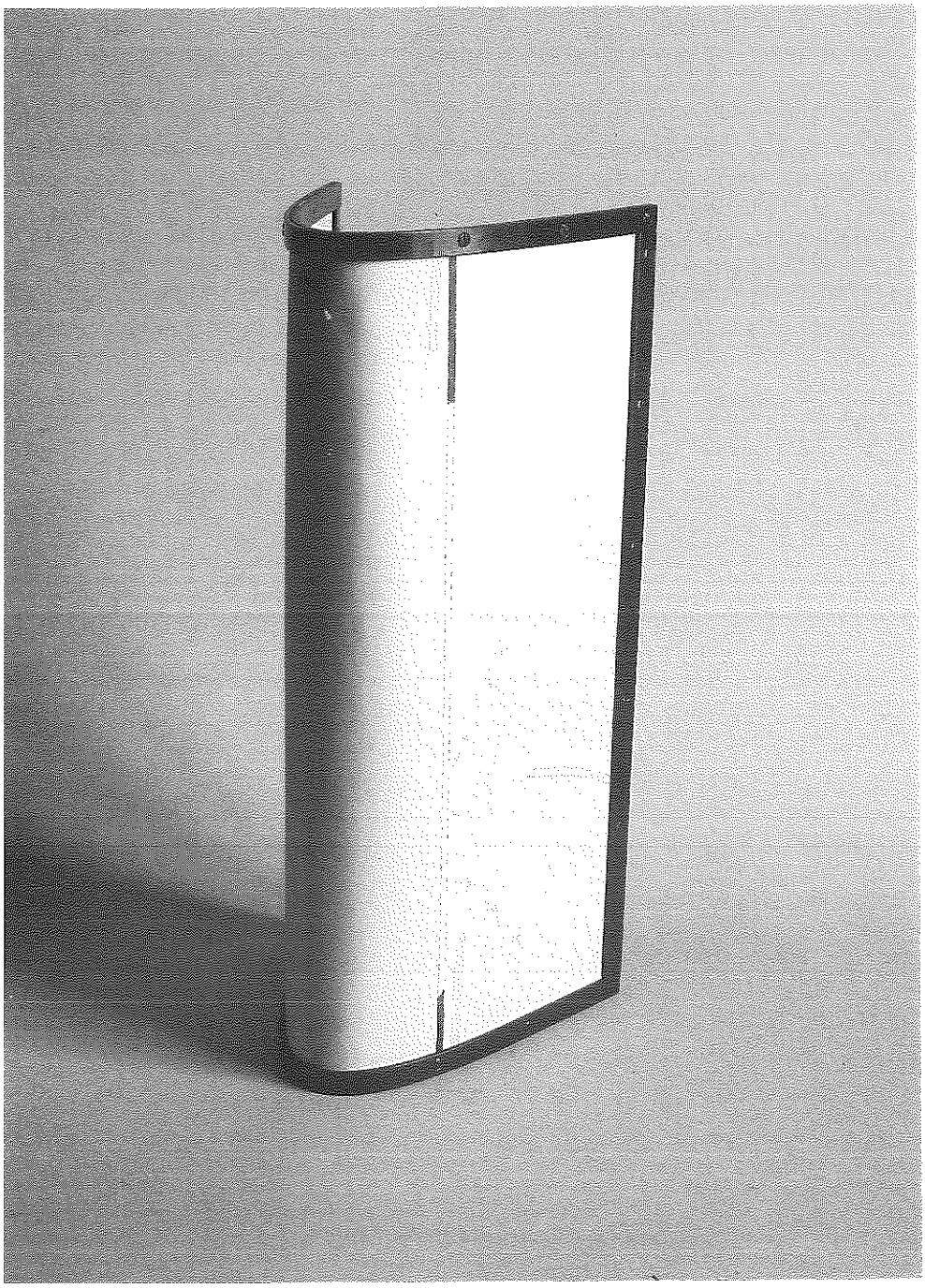

*Figura 107*

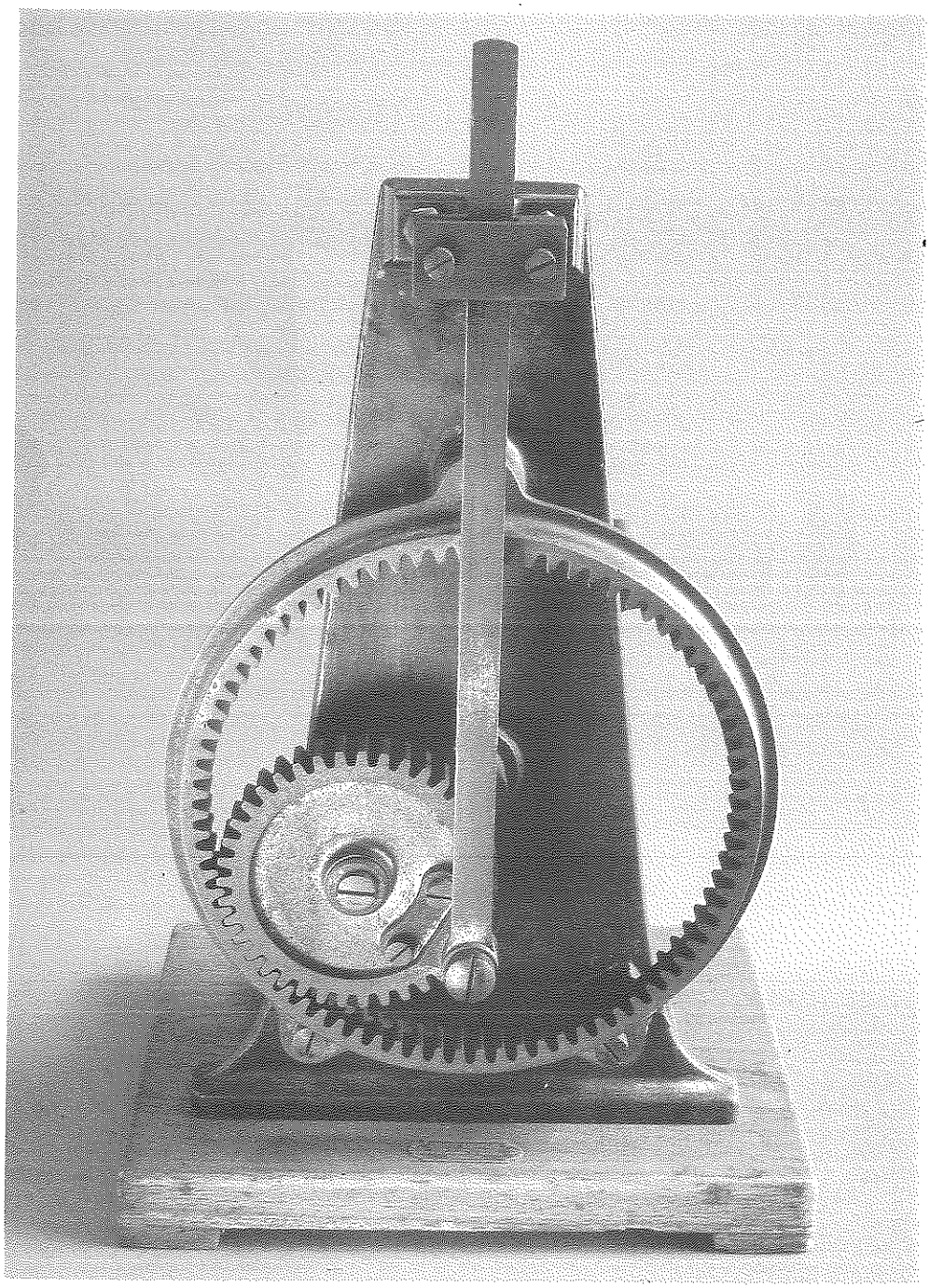

*Figura 108*

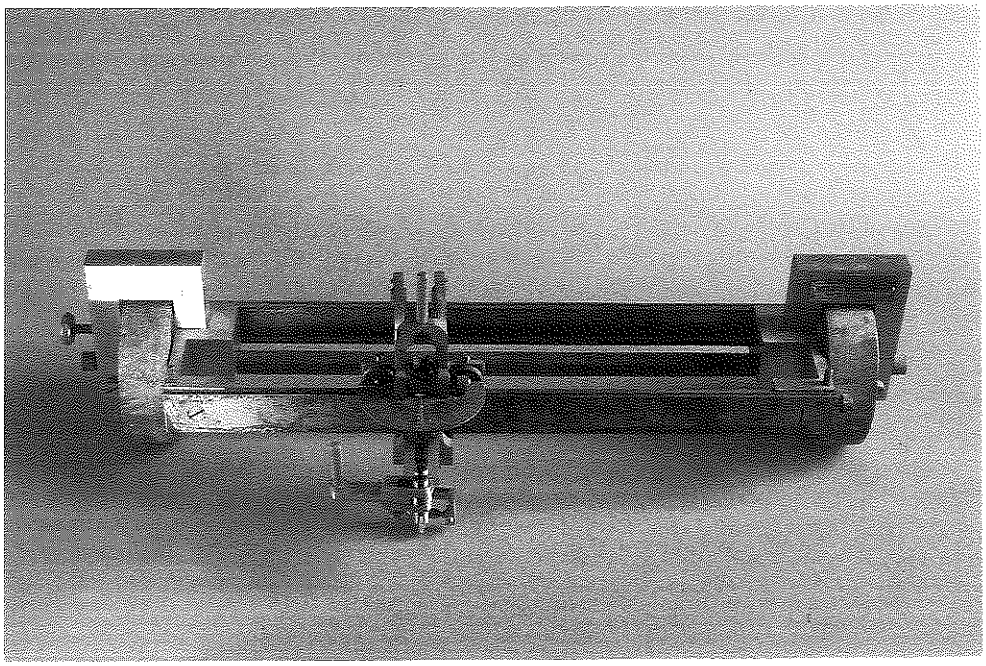

*Figura 109*

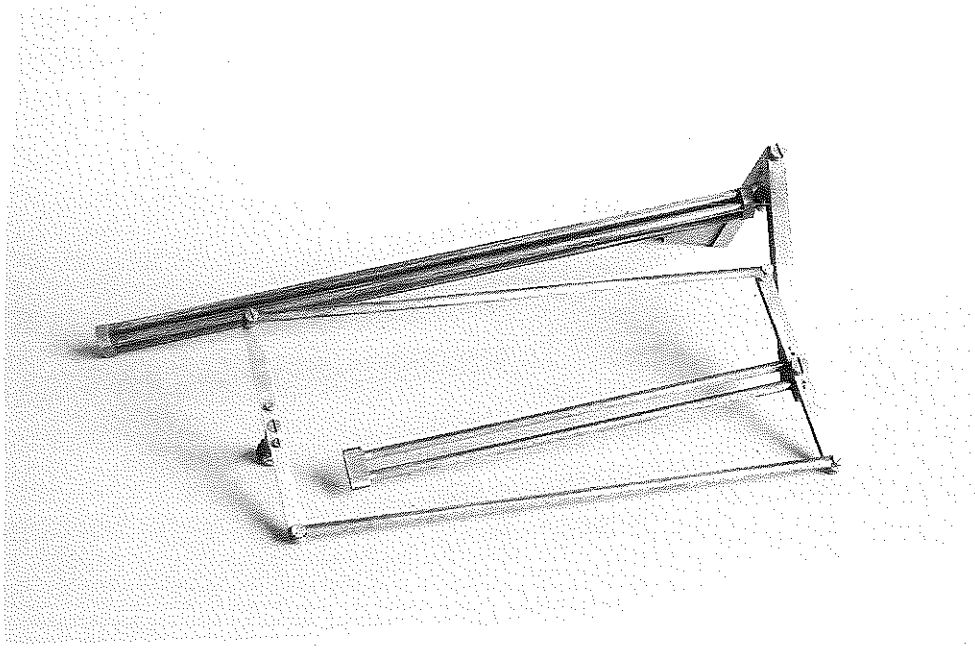

*Figura 110*

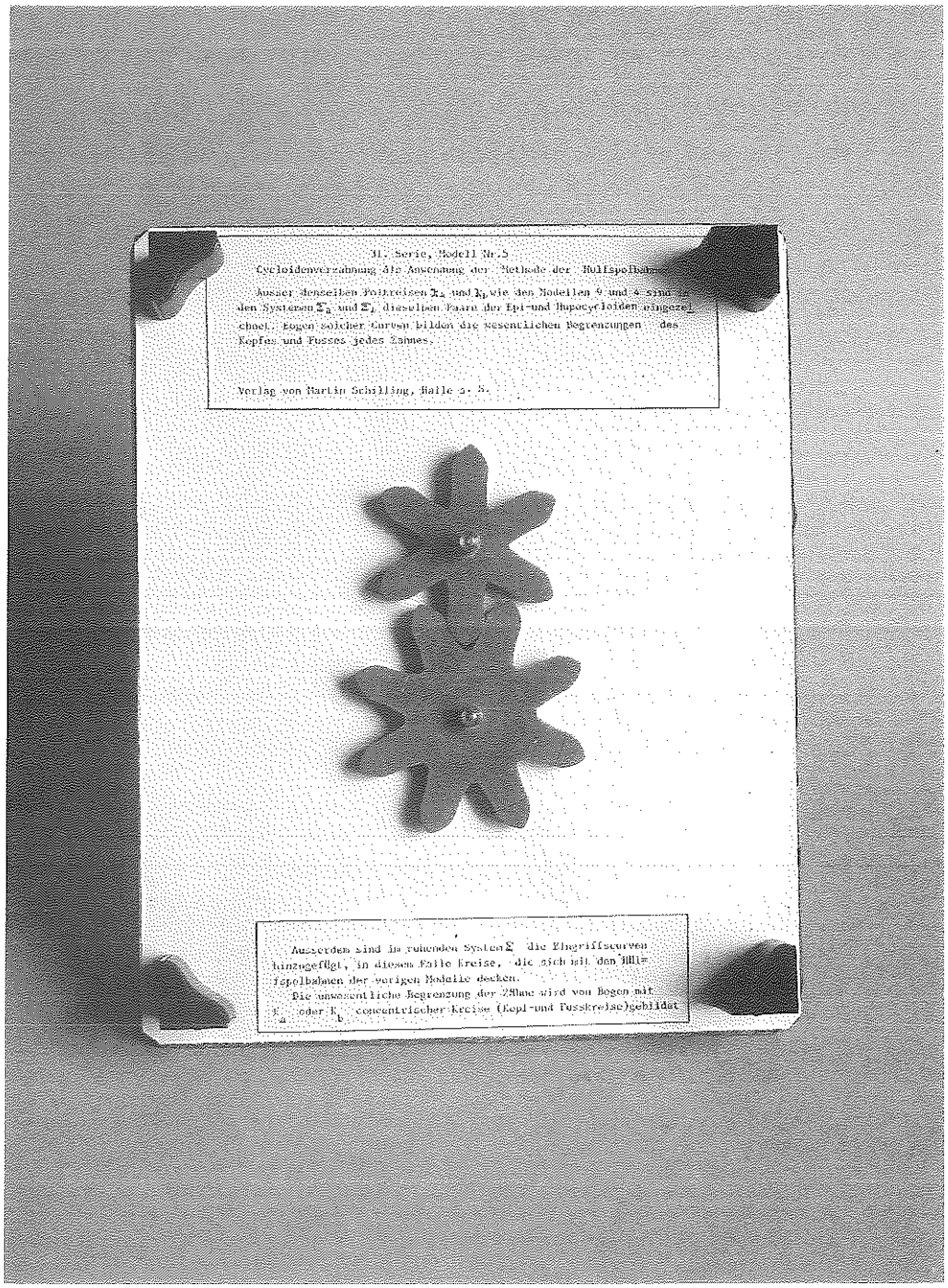
31. Serie, Modell Nr.5
Cycloidenverzahnung. Die Anwendung der Methode der Hülfspolbahnen
Ausser denselben Führkreisen $k_a$ und $k_b$ wie den Modellen 9 und 4 sind
den Systemen $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ dieselben Paare der Epi-und Hypocycloiden eingezeichnet. Bogen solcher Curven bilden die wesentlichen Begrenzungen des Kopfes und Fusses jedes Zahnes.
Verlag von Martin Schilling, Halle a. S.
Ausserdem sind in ruhenden System $\Sigma$ die Eingriffscurven hinzugefügt, in diesem Falle Kreise, die sich mit den Hülfspolbahnen der vorigen Modelle decken.
Die unwesentliche Begrenzung der Zähne wird von Bogen mit $k_a$ oder $k_b$ concentrischer Kreise (Kopf-und Fusskreise) gebildet

*Figura 111*

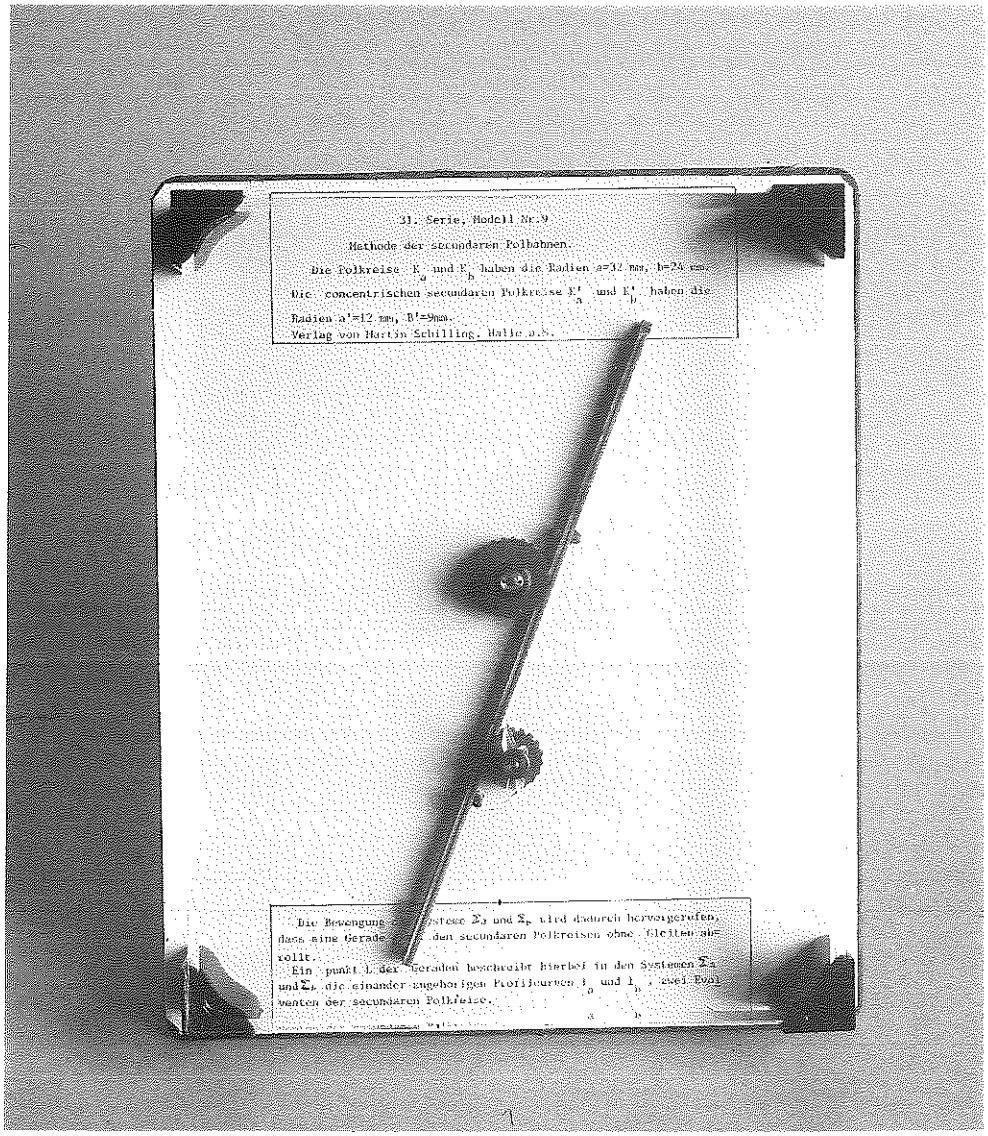
31. Serie, Modell Nr.9
Methode der secundaren Polbahnen.
Die Polkreise $E_a$ und $E_b$ haben die Radien a=32 mm, b=24 mm.
Die concentrischen secundaren Polkreise $E'_a$ und $E'_b$ haben die
Radien a'=12 mm, b'=9mm.
Verlag von Martin Schilling, Halle a.S.

*Figura 112*

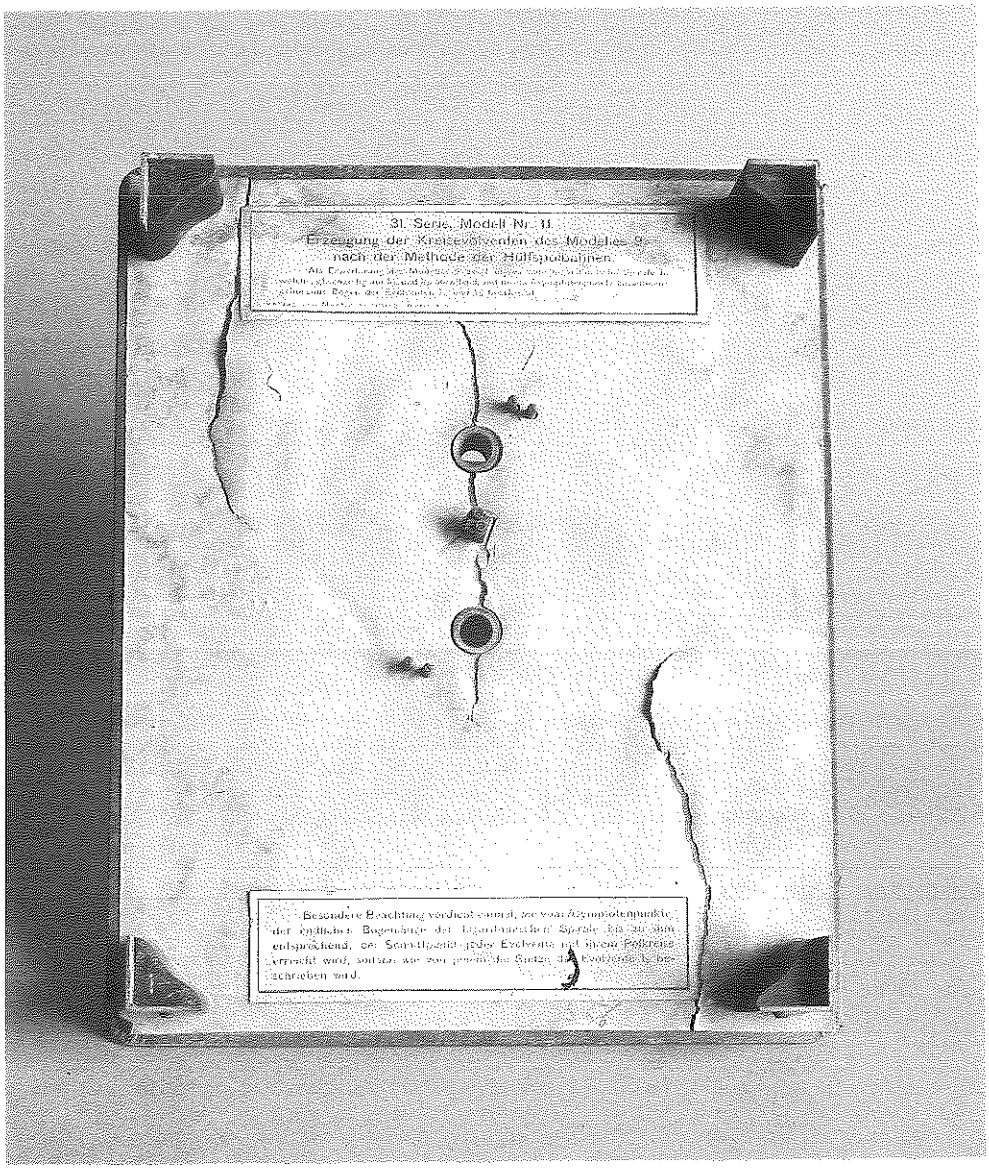
31. Serie, Modell Nr. 11.
Erzeugung der Kreisevolventen des Modelles 9
nach der Methode der Hülfsrollbahnen.

*Figura 113*

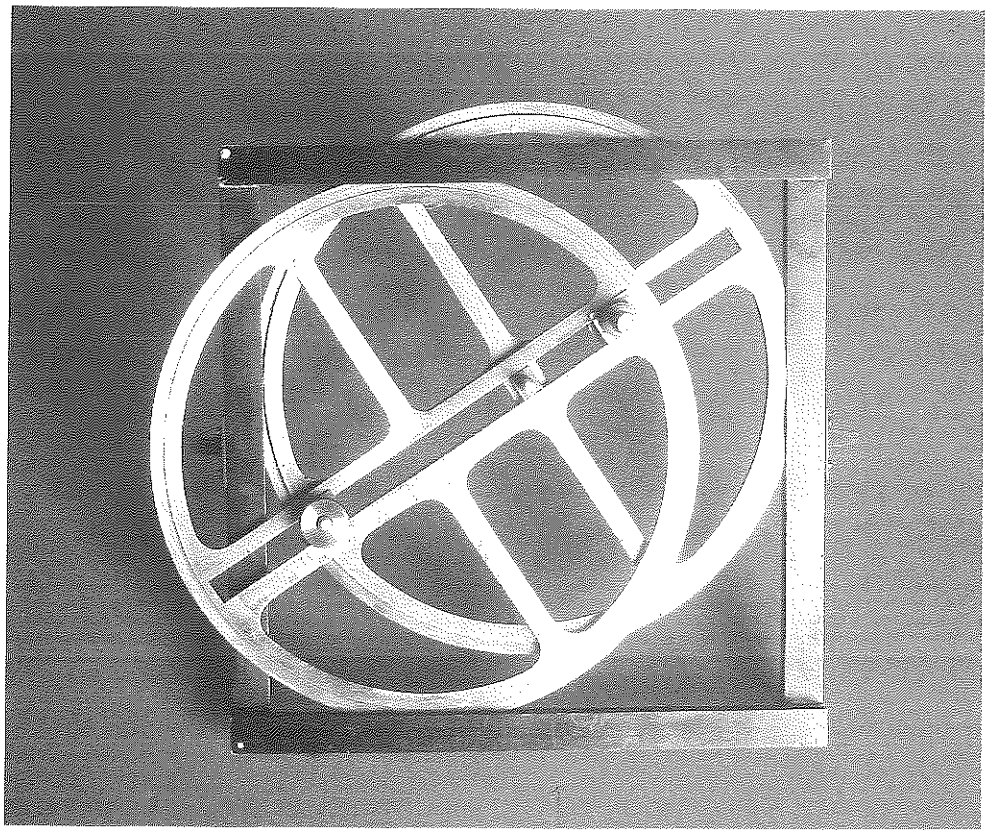

*Figura 114*

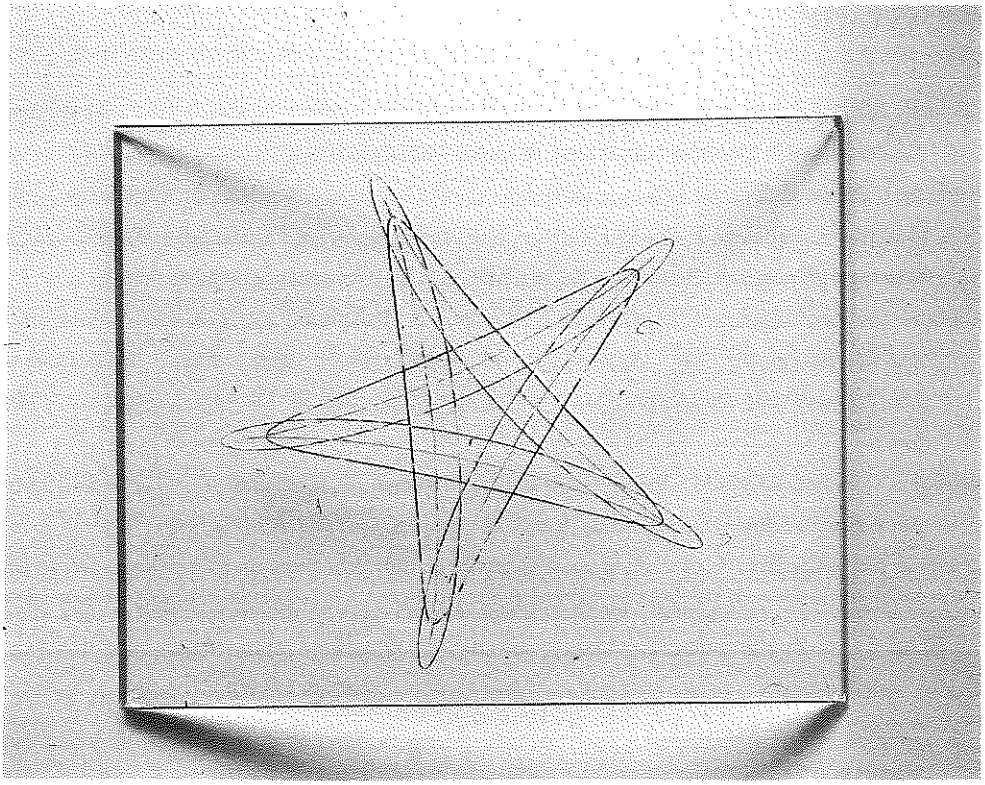

*Figura 115*

**BIBLIOGRAFIA**

[Caporali 1884] *Fondo Sannia, Lettera Caporali,* presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II".

[Carbone Cardone Casanovas Mancuso Palladino 1998] Carbone L., Cardone G., Casanovas J., S.J., Mancuso S., Palladino F., *La sede storica degli studi superiori di Matematica a Napoli nella sua attuale configurazione*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. di Napoli (in corso di pubblicazione).

[Carbone Cardone Palladino 1996] Carbone L., Cardone G., Palladino F., *Le Collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di matematica e applicazioni "R.Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II"*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli (4) 63, 1996, 33-65.

[Carbone Cardone Palladino 1997a] Carbone L., Cardone G., Palladino F., *Il Fondo Cesàro: costituzione, recupero e consistenza*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. (4) 64, 1997, 217-278.

[Cardone 1996] Cardone G., *Il Congresso della Mathesis del 1921: Roberto Marcolongo ed i modelli matematici*, in *Cento anni di Matematica, Atti del Convegno "Mathesis Centenario 1895-1995", Una presenza nella cultura e nell'insegnamento*, Fratelli Palombi Editori, Roma 1996, 147-152.

[Cesàro 1906] *Fondo Cesàro, Epistolario, Destinatari: Schilling, Mittenti: Schilling*, presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II".

[Cussons] *Apparatus for Pratical Plane and Solid Geometry. Mensuration, Pratical Mathematics, Geometry Applied to Mechanics*, G.Cussons, Ltd., Lower Broughton, Manchester s.d.

[Del Re 1906] Del Re A., *Insegnamento di Geometria Descrittiva (prof. A.Del Re)*, R. Università di Napoli, Napoli 1906.

[Dyck 1892] Dyck W., *Catalog mathematischer und mathematisch-physicalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, K. Hof-u. Universitätsbuchdruckerei von Dr. C. Wolf und Sohn, München 1892.

[Fischer 1987] Fischer G., *Mathematische Modelle. Mathematical Models*, Friedr. Vieweg. & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1987.

[Inventario 1944] *Inventario dell'Istituto di Matematica*, presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II".

[Marcolongo 1935] Marcolongo R., *Quaranta anni di insegnamento*, S.I.E.M., Napoli 1935.

[Mathesis 1921] Relazione del Congresso di Napoli, 13-16 Ottobre 1921, *Sul materiale didattico d'insegnamento*, Periodico di Matematiche (4) II, 1922, 92-96.

[Miranda 1977] Miranda C., *Breve storia e prospettive future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) 44, 1977, 1-38.

[Morelli Palladino 1992] Morelli A., Palladino F., *Sui modelli matematici in gesso*, Lettera Pristem, Dossier didattica, n. 6, Novembre 1992, pp. XIII-XVI.

[Palladino 1985] Palladino F., *Ernesto Pascal e gli integrafi per equazioni differenziali*, Annali dell'Istituto e Museo di storia della scienza, X (1985), 2, 67-76.

[Palladino 1992] Palladino F., *Antichi strumenti e modelli matematici conservati a Napoli e a Pisa*, Physis 29, 1992, 833-847.

[Palladino 1995] Palladino F., *Planimetri e Integrafi*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 18b (1995), 1, 51-79.

[Palladino 1997a] Palladino F., *Uno specimen dei giacimenti italiani di modelli e strumenti matematici: il Nachlass dell'Università di Pavia*, Mem. Ist. Lombardo Acc. di Scienze e Lettere. Classe Sc. Mat. Nat., 29 (1997), mem. 5, 315-374.

[Palladino 1997b] Palladino F., *Il fondo di antichi modelli e strumenti del Dipartimento di Matematica pura e applicata "G.Vitali" dell'Università di Modena*, in D'Amore B. e Pellegrino C. (eds.), *Convegno per i sessantacinque anni di Francesco Speranza*, Pitagora Editrice, Bologna 1997.

[Palladino 1997c] Palladino F., *Sulle collezioni di modelli matematici dei Dipartimenti di Matematica dell'Università e del Politecnico di Torino*, Nuncius 12, 1997, 157-173.

[Palladino 1998] Palladino F., *Il fondo di Modelli e Strumenti matematici antichi dell'Università di Padova e l'iniziativa di Giuseppe Veronese per un Laboratorio Nazionale Italiano*, in print.

[Pascal 1914] Pascal E., *I miei integrafi per equazioni differenziali*, Libreria di B.Pellerano, Napoli 1914.

[Picone 1941] Picone M., *Ernesto Pascal*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) 12, 1941-1942, 54-82.

[R.Sc.Politecnica 1911] *R. Scuola Superiore Politecnica di Napoli nella ricorrenza del Primo Centenario MDCCCXI-MCMXI*, Stabilimento Tipografico N.Jovene et. C°, Napoli 1911, 145-149.

[Schilling 1903] *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung von Martin Schilling*, Halle a.S. 1903.

[Schilling 1911] *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung von Martin Schilling*, Leipzig 1911.

[Teubner 1908] *B.G. Teubner Verlag auf dem Gebete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik nebst Grenzwissenschaften*, B.G. Teubner, Leipzig und Berlin 1908.

[Teubner 1912] *Verzeichnis von H. Wieners und P.Treutleins Sammlungen Mathematischer Modelle*, G.B. Teubner, Leipzig und Berlin 1912.

[Tricomi 1962] Tricomi F.G., *Matematici italiani del primo secolo dello stato unitario*, Mem. Acc. Sc. Torino (4) 1, 1962.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXV, (1997) pp. 259-268

# Il calcestruzzo alle soglie del 2000: bilanci e prospettive

Nota di Giuseppe Frigione[1]

Presentata dal Socio Ordinario Riccardo Sersale
(Adunanza del 7 novembre 1998)

*Key words:* admixtures, aggregate, cement, concrete, durability, fibre, reinforcement.

**Abstract** - In order for concrete to continue servicing the needs of our society as a primary material of construction, research in concrete technology must be strengthened. In particular, it is essential, for the conservation of natural resources of the earth, that concrete structures are designed and built for durability.

**Riassunto** - Nel futuro prossimo, affinché il calcestruzzo possa continuare ad essere il principale materiale da costruzione, devono essere incrementate le ricerche sulla sua tecnologia. In particolare, è essenziale, per la conservazione delle nostre risorse naturali, che le strutture in calcestruzzo siano progettate e realizzate tenendo presente quale fattore primario la durabilità.

## 1 - INTRODUZIONE

Oggi il calcestruzzo si presenta come il materiale strutturale dominante. Esso prende le forme delle infrastrutture più ardite, andando da chilometrici ponti ai tunnel sottomarini, da ardite dighe ai grattacieli alti centinaia di metri, dai contenitori ad elevata affidabilità per lo stoccaggio di fluidi o solidi tossici ai manufatti anti-scoppio. É utilizzato anche per strutture portuali ed aeroportuali, per la costruzione di centrali elettriche, di impianti per la dissalazione dell'acqua di mare, di fognature e di strutture galleggianti.

Seguendo questo andamento, si possono prevedere nel 21° secolo ponti a lunga campata, profondi e ampi tunnel sottomarini che collegano isole e

[1] Università degli Studi della Calabria, Dipartimento di Ingegneria Chimica e dei Materiali. 87030 Rende, Cosenza (Italy).

paesi, aeroporti con installazioni per il transito dei passeggeri e delle merci sotterranee e aeree, città con edifici a torri alti più di un chilometro.

Tuttavia esistono significative minacce al futuro del calcestruzzo in un orizzonte altrimenti in espansione.

L'incremento delle capacità produttive di cemento è contrastato da gruppi che si preoccupano di protezione ambientale perché l'industria del cemento è ad alto consumo energetico e perché la produzione di cemento nel mondo oggi genera, come risultato della decarbonatazione del calcare e della combustione del combustibile, un miliardo di tonnellate annue di $CO_2$ (5% dell'emissione mondiale di $CO_2$), contribuendo all'effetto serra della terra.

La penuria di aggregati naturali, particolarmente sentita nelle aree più sviluppate. Esistono chiaramente soluzioni, ma esse causano notevoli aumenti dei costi.

La mancanza di durabilità del calcestruzzo è un'altra minaccia. Negli anni '50 e '60 si ritenne che le strutture in calcestruzzo avrebbero potuto avere una vita di servizio pressoché infinita. Oggi molte di quelle strutture mostrano serie danneggiamenti a causa della corrosione dei ferri, del gelo-disgelo, della reazione alcali-aggregati.

## 2 - COMPONENTI

**Cemento**: Non esiste alternativa economica al clinker di cemento portland quale base per i leganti idraulici. Per minimizzare il problema legato all'emissione di $CO_2$ e all'alto consumo energetico, si studiano composizioni di cementi portland modificati. Un recente studio di Takuma *et al*[1] mostra che sostituendo la fase $3CaO.SiO_2$, il più importante componente del cemento portland, ma la cui formazione richiede grandi quantità di energia, con $2CaO.SiO_2$ e sostituendo $3CaO.Al_2O_3$ con $4CaO.Al_2O_3.SO_3$ si può raggiungere circa il 30% di riduzione di $CO_2$ e una sostanziale diminuzione del consumo di energia. Risultati simili possono essere ottenuti producendo cementi portland di miscela contenenti il 50-70% di un materiale cementante supplementare, come loppe granulate d'altoforno o pozzolane. Questi cementi sono usati già da tempo in Europa. Recentemente, in altre parti del mondo, ad esempio in USA, questi materiali supplementari sono utilizzati quali sostituenti del cemento portland nel calcestruzzo. Normalmente, miglioramenti significativi nella resistenza meccanica e nell'impermeabilità del calcestruzzo che contengono

pozzolana o loppa non sono realizzati se non oltre i sette giorni di stagionatura; invece questi benefici iniziano a manifestarsi anche dopo tre giorni quando sono usati come additivi al calcestruzzo sottoprodotti pozzolanici estremamente attivi, come il fumo di silice (*silica fume)* o la cenere di pula di riso. Una miscela di additivi minerali permette di ottenere un calcestruzzo che sviluppi resistenza meccanica a una velocità comparabile a quella sviluppata da un calcestruzzo contenente cemento portland puro ma con meno del 40-50% di clinker portland presente. Cenere volante (*fly ash*), loppa d'altoforno e metacaolino micronizzato sono anche sperimentati come sostituti di pozzolane altamente reattive[2].

Il secondo approccio che dovrebbe rendere possibile usare elevati volumi di *fly ash* nel calcestruzzo, sino al 50%, senza compromettere le resistenze iniziali e finali, consiste nel ridurre il rapporto acqua/materiale cementizio approssimativamente a circa 0,30 con l'aiuto di superfluidificanti[3].

Ricerche per la conservazione di energia nella fabbricazione del cemento riguardano l'uso di rifiuti come combustibili, di mineralizzanti per ridurre la temperatura di formazione del clinker, l'impiego di materie prime che richiedano temperature di clinkerizzazioni più basse. Sono anche sperimentate differenti tecnologie che utilizzano letti fluidi ovvero ricorrono ad attivazione chimica o meccanica delle materie prime per produrre clinker a temperatura più bassa.

**Aggregati**: Le riserve di buoni aggregati tendono rapidamente ad esaurirsi, specialmente nella vicinanza di aree urbane ed industriali, anche per la mutata sensibilità delle legislazioni urbanistiche. Dall'altra parte esistono crescenti difficoltà nel disporre di siti idonei per allocare gli scarti, in forte aumento, provenienti dalla demolizione di opere in calcestruzzo. É pertanto attuale la necessità di riciclare il conglomerato demolito per il confezionamento di calcestruzzo da destinare alla realizzazione di nuove strutture.

Fra gli aggregati poco utilizzati sono quelli contenenti silice reattiva con gli alcali e quelli derivati da sedimenti porosi. Gli aggregati alcali reattivi non sono dannosi a meno che non si usino in combinazione con cemento portland ad alto contenuto di alcali o di additivi chimici fortemente alcalini, o se il calcestruzzo è esposto ad acqua contenente sali alcalini. In questi casi, piuttosto che rigettare l'aggregato, il problema può essere risolto utilizzando un'idonea aggiunta pozzolanica al calcestruzzo o cementi portland di miscela contenenti elevate proporzioni di pozzolana o loppa. Per quanto attiene gli aggregati porosi, essi comportano problemi di fessurazione e di durabilità del

calcestruzzo a causa dell'alto ritiro per essiccamento. Una possibile soluzione è il loro utilizzo con un cemento a ritiro compensato, come riportato in letteratura[4].

Benché le scorie dei forni metallurgici e le *fly ash* dagli impianti di produzione di energia elettrica siano utilizzate come materiale cementante supplementare, le quantità disponibili sono ampie: pertanto deve essere esplorata la loro conversione in altri idonei prodotti quali aggregati leggeri da loppe espanse e da *fly ash* sinterizzate.

**Additivi chimici**: Una rivoluzione nella tecnologia degli additivi è stata l'introduzione dei superfluidificanti per produrre calcestruzzi con alta lavorabilità pur con rapporti acqua/cemento molto bassi. Non solo l'utilizzo di questi additivi sarà incrementato nel futuro ma saranno sviluppati nuovi superfluidificanti con migliori caratteristiche. Per i superfluidificanti, le due maggiori limitazioni sono, infatti, la rapida perdita di lavorabilità che riduce l'effetto benefico dell'alta scorrevolezza al tempo della posa in opera, e la dipendenza dal tipo di cemento, dalla granulometria dell'aggregato e dalla temperatura del calcestruzzo. Già oggi nuovi tipi di superfluidificanti, basati su esteri acrilici carbossilati (CAE), mantengono la lavorabilità iniziale per un periodo più lungo.

**Fibre**: Nella attuale pratica delle costruzioni civili, fibre discontinue sono aggiunte alla malta o al calcestruzzo in basse frazioni di volume, soprattutto per migliorare la resistenza alla fessurazione del materiale. Le fibre più comuni utilizzate sono quelle di acciaio e di polipropilene. La frazioni di volume tipica per le fibre di acciaio convenzionali è 1%, mentre le fibre di polipropilene sono usate tipicamente allo 0,2 - 0,5%.

L'inclusione di alti volumi di fibre di acciaio nella matrice cementizia[5] produrrebbe significanti incrementi nella resistenza a trazione, all'urto e incremento del limite di proporzionalità, ciò contribuendo all'assorbimento di grandi quantità di energia. Non è possibile produrre calcestruzzi con elevate frazioni di volume di fibre con le convenzionali procedure di miscelazione a causa dei problemi di lavorabilità che un tale calcestruzzo presenterebbe. Tecniche di processo innovative, come l'infiltrazione di malte fluide in ammassi di fibre, permetteranno l'ottenimento di manufatti con alti volumi di fibre. Ancora, l'utilizzo di microfibre - di carbonio o di acciaio - permetterà l'inglobamento di circa un miliardo di fibre per ogni metro cubo di calcestruzzo.

## 3 - NUOVI MATERIALI

Il calcestruzzo in questi ultimi anni ha subito una rivoluzione tecnologica per il livello di conoscenza raggiunto nella correlazione tra proprietà microstrutturali e ingegneristiche. Su queste basi sono stati progettati nuovi materiali che per la loro composizione e per il tipo di processo, sostanzialmente per laminazione o estrusione, sono destinati alla produzione di manufatti destinati a settori diversi da quelli tradizionali dell'edilizia.

Questi materiali possono essere suddivisi in MDF (*Macro Defect Free*) e DSP (*Densified Small Particles*). Questi ultimi, infine, includono i materiali HCP (*High Performances Concretes*) e RPC (*Reactive Powder Concretes*). Si tratta di calcestruzzi ad alta resistenza, spesso fibrorinforzati, confezionati con additivi superfluidificanti e *silica fume*.

Negli anni 80 si è scoperto infatti l'effetto sinergico della combinazione tra additivi superfluidificanti e la *silica fume*: i superfluidificanti permettono di eliminare l'inconveniente della maggiore richiesta d'acqua in conseguenza dell'elevata area superficiale del *silica fume*. É così possibile, senza alcun aumento del rapporto acqua/cemento, ottenere un addensamento microstrutturale, riempiendo i vuoti interstiziali tra i granuli di cemento con sferette di 0.01-1 μm di *silica fume* e sfruttare, inoltre, la loro reazione pozzolanica per ottenere prodotti di idratazione secondaria.

Questi materiali raggiungono una resistenza a compressione a 28 giorni di 100 $N/mm^2$, ma proprio per la loro accresciuta compattezza e durezza, sono caratterizzati da problemi di fragilità e da valori di energia di frattura attorno a 100-300 $J/m^2$.

I materiali RPC 200 si presentano oggi come un superamento di questi limiti grazie: all'incremento della densità attraverso la riduzione del rapporto acqua/cemento, fino a 0,15, utilizzando superfluidificanti più efficaci; al miglioramento della omogeneità sostituendo gli aggregati medio-grosso con sabbia fine (diametro 0.15 - 0.40 mm); al miglioramento della microstruttura impiegando silice di precipitazione altamente reattiva, un alto dosaggio di cemento a basso tenore di $C_3A$ e stagionando il manufatto a 90-160°C; ed infine all'aumento della duttilità con l'inserimento di microfibre metalliche. L'RPC 200 (*Reactive Powder Concrete*), non mancherà di attirare presto l'attenzione sulle sue strepitose "misure": 200 $N/mm^2$ per la resistenza a compressione, 30 $N/mm^2$ a flessione e 30 000 $J/m^2$ per l'energia di frattura.

**Durabilità**: La durabilità del calcestruzzo è il problema più grande da essere affrontato.

La causa più frequente di degrado delle strutture in calcestruzzo armato è la corrosione delle armature. I possibili accorgimenti per migliorare la resistenza alla corrosione delle armature, sono:

- Utilizzo di acciai inossidabili.
- Rivestimento delle armature.
- Protezione catodica mediante anodi sacrificali se la struttura è sommersa, o mediante corrente impressa se è esposta all'atmosfera.
- Utilizzo di membrane impermeabili alla $CO_2$ e/o alle soluzioni saline.
- Inibizione mediante utilizzo di inibitori chimici[6].

Gli acciai inossidabili sono molto costosi. Inoltre, essi sono suscettibili alla corrosione per vaiolatura (*pitting*). Secondo ricerche recenti un acciaio resistente alla corrosione può essere sviluppato senza l'uso di elementi alliganti costosi se la microstruttura - invece della convenzionale ferrite-carburo dove il $Fe_3C$ agisce da catodo rispetto alla ferrite - è una dual-fase ferritica martensitica (DFM). Studi condotti da Trejo *et al.*[7] hanno mostrato che questo acciaio può raggiungere elevata resistenza meccanica, buona duttilità e buona resistenza alla corrosione anche quando è immerso in un calcestruzzo contenente cloruri.

Sono utilizzai due tipi di rivestimenti per le armature, vale a dire zinco (acciaio galvanizzato) e resine epossidiche. Nel caso di armature galvanizzate, l'acciaio è protetto galvanicamente mediante dissoluzione sacrificale (anodica) dello zinco i cui prodotti di corrosione non provocano danneggiamenti meccanici al calcestruzzo circostante, non essendo espansivi. Solo ad esaurimento del rivestimento di zinco l'acciaio, non più protetto, inizierà a corrodersi con velocità simile a quella delle armature non zincate. Tutto ciò determina un incremento di durabilità delle strutture.

Nel Nord America, le armature rivestite con epossidici sono molto utilizzate sebbene costino due volte le armature convenzionali non rivestite. É stato tuttavia osservato nelle armature un film di sotto-corrosione, perdita di adesione, vaiolature e fenditure del rivestimento perché il rivestimento era divenuto imperfetto o perché il rivestimento epossidico dell'acciaio era stato maneggiato impropriamente durante l'installazione. Attualmente, revisioni significative sono state fatte alla pratica raccomandata di rivestimento, fabbricazione e installazione di questo tipo di armatura.

Altra alternativa è la sostituzione dei ferri di armatura con barre in plastica rinforzata con fibre (*Fiber Reinforced Plastics o FRP*). Il termine FRP

raccoglie vari tipi di materiali costituiti da fibre continue immerse in una matrice polimerica. Questi materiali, comparati con gli acciai convenzionali, presentano vantaggi quali elevata resistenza a trazione, eccellente resistenza alla corrosione, basso peso specifico, non elevato modulo elastico e coefficiente di dilatazione termica calibrabile. Le fibre utilizzate sono vetro, carbonio, fibre aramidiche e PVA. Non altrettanto buona è l'aderenza con la malta cementizia.

La durabilità del calcestruzzo è di limitato valore senza la durabilità di "apparenza". Gli aggressivi agiscono sulla superficie del calcestruzzo influenzandone sia l'aspetto estetico che il comportamento. Infatti la permeabilità del calcestruzzo è determinata sia dal rapporto acqua/cemento che dalla porosità superficiale. L'utilizzo di casseformi a permeabilità controllata, rimuovendo l'eccesso di aria e di acqua all'interfaccia calcestruzzo/cassaforma, migliorano la qualità della superficie e quindi la durabilità.

## 4 - PROPORZIONAMENTO DELLE MISCELE E PRODUZIONE

Poiché la resistenza a compressione può essere facilmente misurata, è entrato nell'uso comune usare essa come un indice della qualità del calcestruzzo. Tuttavia esiste la consapevolezza che la resistenza non è sempre un criterio affidabile della durabilità del calcestruzzo. Recentemente Hooton[8] ha descritto miscele per calcestruzzo ad altissima resistenza che presentano elevata permeabilità e quindi non sono durabili. Secondo questo autore, piuttosto che il rapporto acqua/cemento, è il contenuto di acqua di miscelazione che mostra la migliore correlazione con la permeabilità del calcestruzzo.

Monteiro e Helena[9] hanno proposto nomogrammi per la progettazione delle miscele combinando le tre relazioni più comunemente usate: la legge di Abram che correla la resistenza a compressione con il rapporto acqua-cemento, la legge di Lyse che correla il rapporto acqua-cemento con il rapporto aggregati-cemento e la legge di Molinari che correla il contenuto di cemento col rapporto aggregati-cemento. Tali nomogrammi possono essere usati per determinare la miscela quando il criterio di progettazione è diverso dalla resistenza a compressione.

**Controllo di qualità:** Le norme sui calcestruzzi in uso prevedono il controllo di qualità basato sulla resistenza a compressione: un campione del calcestruzzo è utilizzato per confezionare provini che sono poi stagionati in laboratorio sotto controllate condizioni. Non prendendo in considerazione la posa in opera, la

vibrazione e le condizioni di stagionatura (*curing*) nel cantiere, i risultati dei provini non forniscono un quadro realistico della qualità del calcestruzzo in opera. Sono controllate le variazioni nella qualità del calcestruzzo prima della posa in opera ma ciò non assicura la qualità del calcestruzzo in situ.

Carino[10] ha descritto metodi di prove non distruttive per stimare la qualità del calcestruzzo in situ. Mentre la velocità degli ultrasuoni, l'analisi dello spettro delle onde superficiali, la termografia all'infrarosso, e i metodi di impatto-echo e radar sono utili per la scoperta di fessure nelle vecchie strutture, la prova del pull-out e l'analisi di carote sono usate per determinare la qualità nelle nuove costruzioni. Idorn[11] predice che durante il 21° secolo la tecnologia del monitoraggio in situ della qualità del calcestruzzo di fresco processato sostituirà completamente il controllo di qualità convenzionale su provini.

Prove di permeabilità all'ossigeno, alla $CO_2$ ed all'acqua (i composti responsabili della corrosione dei ferri) in situ sul calcestruzzo indurito[12], per stimare la durabilità, saranno normali.

Per la corrosione dei ferri di armatura, che causa di gran lunga i maggiori danni, la determinazione può essere effettuata mediante ispezione visuale solamente quando si presentano fessurazioni e delaminazioni. Il costo per la riparazione, a questo stadio del danno, è estremamente elevato. Tecniche non distruttive che possono determinare il deterioramento prima che il danno visivo si presenti è per esempio la mappatura del potenziale. A più alti livelli di monitoraggio è l'implementazione di sensori durante la costruzione. A questo scopo si utilizzano: sensori a fibre ottiche per monitorare deformazioni e spostamenti[13]; celle di corrosione per monitorare l'ingresso di un fronte di depassivazione; sensori di umidità per monitorare la conduttività del calcestruzzo e/o l'efficienza delle misure protettive[14].

## 5. RESTAURO DI STRUTTURE ESISTENTI

Il crescente bisogno di riparazione delle strutture danneggiate ha aperto le porte ad una industria completamente nuova. Il costo annuale per riparazioni di strutture in calcestruzzo esistenti sta raggiungendo i miliardi di dollari U.S.A. Con riguardo al problema principale, la corrosione dei ferri di armatura, differenti approcci si stanno sviluppando ed utilizzando. Essi possono essere raggruppati come segue:

- Rimozione del calcestruzzo ammalorato ed, eventualmente, del calcestruzzo adiacente contaminato da cloruro, pulizia delle armature, suo rivestimento e ripristino con calcestruzzo di qualità.
- Protezione catodica mediante anodi sacrificali se la struttura è sommersa, o mediante corrente impressa se è esposta all'atmosfera.
- Re-alcalizzazione elettrochimica con contemporanea rimozione dei cloruri utilizzando la tecnica cosiddetta di desalinizzazione o passiva con incamiciamento del calcestruzzo con cemento portland.

La rimozione del calcestruzzo ammalorato è la tecnica più utilizzata nella pratica. Sfortunatamente, l'acciaio ricoperto dal nuovo calcestruzzo diviene catodo e provoca la corrosione dei ferri adiacenti, a meno che non siano prese speciali precauzioni. La protezione catodica, nonostante l'alto costo, è applicata sempre in maggior misura, anche utilizzando nuovi anodi sacrificali.

## 6. CONTRIBUTO DEL CALCESTRUZZO ALLA SALVAGUARDIA AMBIENTALE

Non c'è dubbio che in futuro le considerazioni ecologiche avranno una crescente influenza sulla scelta dei materiali da costruzione. Queste coinvolgono la desuolificazione e la deforestazione per la ricerca delle materie prime, il consumo energetico e di acqua, l'inquinamento e lo smaltimento dei materiali di rifiuto prodotti dal processo di fabbricazione. Confrontando i profili ecologici dell'acciaio, del vetro, dei laterizi e del calcestruzzo armato, Kreijger[15] conclude che tra i materiali da costruzione artificiali, il calcestruzzo armato è il più "amichevole" per l'ambiente.

É da considerare anche che le industrie del cemento e del calcestruzzo forniscono un ideale "ricovero" per prodotti di rifiuto di altre industrie. La distruzione dei rifiuti urbani, industriali ed agricoli è uno dei maggiori problemi sociali in tutto il mondo. Le città e le industrie generano centinaia di milioni di tonnellate di rifiuti tossici: materiali combustibili come pneumatici usati, oli esausti, solventi per vernice, solventi di lavanderie, inchiostri dell'industria grafica e residui agricoli (gusci di mandorle e noci, pula di riso). La distruzione di questi prodotti in inceneritori risulta in una perdita della loro energia potenziale come combustibile e il rilascio di effluenti e di ceneri tossiche. Le industrie del cemento e del calcestruzzo sono in grado di eliminare molti residui dall'ambiente ricevendo allo stesso tempo significativi benefici economici e tecnici. Glasser[16] suggerisce che l'ambiente ad alto pH e la bassa

permeabilità, ottenibile con l'uso di sistemi a base di cemento portland, è idoneo per l'immobilizzazione di rifiuti radioattivi.

## 7. CONCLUSIONI

Il calcestruzzo di cemento è il materiale oggi utilizzato per la costruzione di ponti, strade, tunnel, dighe, porti e centrali elettriche. Esso è anche il materiale da costruzione dominante per le altre infrastrutture urbane, quali serbatoi di acqua potabile e per il trattamento delle acque di rifiuto, edifici residenziali, installazioni industriali, e vie di trasporto sotterranee ed aeree.

Sono parimenti in gestazione molti megaprogetti, quali lunghi ponti e tunnel sottomarini, aeroporti e città su isole artificiali: si presenta cioè un futuro eccitante per il calcestruzzo, particolarmente nei paesi industrializzati. La principale minaccia all'utilizzo del calcestruzzo è il deterioramento delle strutture in calcestruzzo prima che sia terminata la loro vita di servizio.

## 8 - RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI


1. Takuma Y., Shirasaka T., Fujita H., Kobayashi K., and Uchida S.; (1995). *J. Research Chichibu Onade Cement Corp.*, **46** (129) 56.
2. Mehta P.K; (1994). *Advances in Cement and Concrete*, Am. Soc. Civil Engineers, Ed. M.Grutzeck and S.L.Sarkar, pp 243-256.
3. Malhotra V.M.; (1994). *Adv. Concr. Techn., Natural Resources*, Ottawa, Canada, pp 445-482.
4. Polivka M. and Mehta P.K.; (1976). *ASTM STP 597*, pp 36-44 (1976).
5. Wang N., Mindess S. And Ki K.; (1996). *Cem. Concr. Research*, **26** (3) 363
6. Alonso C., Andrade C., Argiz C. and Malric B.; (1996). *Cem. Concr. Research.* **26** (3) 405.
7. Trejo D., Monteiro P., and Thomas G.; (1995). *Proc. Fifth Int. Conf. Offshore and Polar Engineering, The Hague*. pp 177-182.
8. Hooton R.D.; (1993). *Concrete 2000*, Ed. by R.K.Dhir & M.R.Jones, E & FN Spon. p 1239.
9. Monteiro P. And Helena P.; (1994). *ACI SP-144*, pp 519-544.
10. Carino N.J.; (1994). *Proc. Conf. In Tribute to M. Regourd, University of Sherbrooke*, Canada.
11. Idorn G.M.; (1991). *Concrete International*, **13** (7) 18.
12. Hudd R.W.; (1989). *Measurement of the In-Situ Concrete Permeability.* Ph D. Thesis, Dept. Civil Engineering, Loughborough. University of Technology.
13. Miesseler H.J., Lessing R.; (1989). *Monitoring of Load Bearing Structures with Optical Fiber Sensor,* IABSE, Lisbon,.
14. Schiessl P., Raupach M.; (1996). *Concrete in the Service of Mankind <Concrete Repair, Rehabilitation and Protection>*. Ed. R.K.Dhir & M.R.Jones. pp 1-15 London, E & FN Spon..
15. Kreijger P.C.; (1987). *Materials and Structures.* **2** (118) 248.
16. Glasser F.P.; (1993). *Concrete 2000.* Ed. R.K.Dhir & M.R.Jones, E. & FN Spon, pp 1565-78.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXV, (1997) pp. 269-281

# Free Piston Problem for a Viscous Gas

Nota di Berardino D'Acunto[1]

Presentata dal Socio Pasquale Renno
(Adunanza del 5 dicembre, 1998)

*Key words*: Piston problem, Free boundary value problems, Partial differential equations.

**Abstract** - We consider a free boundary value problem related to the motion of a piston in a viscous isentropic gas. We use the fundamental solution of a third order operator and we extend the methods used by Friedman for the Stefan problem. The main result is an existence theorem.

**Riassunto** - Si considera un problema di frontiera libera relativo al moto di un pistone in un gas isoentropico e viscoso. Si usa la soluzione fondamentale di un operatore del terzo ordine e si estende il metodo usato da Friedman nel problema di Stefan. Il risultato principale è un teorema di esistenza.

## 1 - INTRODUCTION

Aim of the paper is the analysis of a free piston problem for one-dimensional, linearized motions of a viscous and isentropic gas which can flow in a finite cylinder between a fixed end and the moving piston. A quite general force can acts on the piston head, whose law of motion is deduced by the momentum balance. The problem is nonlinear because of the free boundary.

[1] Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Facoltà di Ingegneria, Università di Napoli, via Claudio, 21, Napoli.

Recently, a similar problem has been discussed in [9], where the Author has considered the case of a very long narrow cylinder with two gases separated by a piston which moves without friction. The existence of the solution of the free boundary value problem for to the system of isentropic gas dynamics is proved by using the compensated compactness theory.

When the equations of a viscous isentropic gas are linearized, they lead to consider [4] the third order parabolic [5] operator

$$(\varepsilon\partial_t + c^2)\partial_{xx} - \partial_{tt}. \tag{1.1}$$

The fundamental solution $K$ of (1.1) has been studied in [2], where a nonlinear viscoelastic model is discussed. The function $K$ has many properties, completely similar to the ones of the heat fundamental solution.

Here, we apply the method introduced by A. Friedman [7] and L. I. Rubinstein [8] for the Stefan problem. Basing on estimates [3] of $K$ and its derivatives in terms of the heat fundamental solution, we show that this method can be successfully generalized to operator (1.1) in order to analyze the free piston problem.

For this, we first consider the moving boundary value problem and we prove the solution can be given by means of auxiliary functions which are determined by the boundary conditions. Then, we use these results in order to solve the free boundary value problem. The nonlinear integral system is discussed by considering as an unknown the piston acceleration $\ddot{s}(t)$ instead of its path $s(t)$ and an existence and uniqueness theorem is proved. This solves the the free piston problem for small $T$.

## 2 - THE FREE BOUNDARY VALUE PROBLEM

Let us refer to the one-dimensional flow of a viscous isentropic gas and let $u$, $p$ and $\sigma$ denote the the velocity, the pressure and the condensation of the gas at the position $x$ at the time $t$. In the framework of the linearized theory, the basic equations, e.g. [4], are

$$\rho_0 u_t + p_x = (4\mu/3)u_{xx}, \tag{2.1}$$

$$\sigma_t + u_x = 0, \tag{2.2}$$

$$p = C\rho_0^\gamma + \rho_0 c^2 \sigma, \tag{2.3}$$

where $c$ is the speed of sound, $\mu$ the viscosity coefficient, $\gamma$ the ratio of two specific heats of the gas and $C$ =positive constant.

Consider, now, a cylinder filled with gas which can flow between a fixed wall and a moving piston. Let $x = s(t)$ be the location of the head of the piston and $\varepsilon$

the kinematic coefficient of viscosity:

$$\varepsilon = 4\mu/3\rho_0. \tag{2.4}$$

From (2.1)-(2.4) we get

$$u_t + c^2\sigma_x = \varepsilon u_{xx}, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < s(t), \tag{2.5}$$

$$\sigma_t + u_x = 0, \qquad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < s(t). \tag{2.6}$$

At the free boundary the velocity of the gas must equal the piston speed

$$u(s(t), t) = \dot{s}(t), \quad 0 < t < T. \tag{2.7}$$

Moreover, from the balance of momentum and using (2.3), (2.4), we obtain

$$m\ddot{s} = \alpha C\rho_0^\gamma + \alpha\rho_0[c^2\sigma(s(t), t) - \varepsilon u_x(s(t), t)], \quad 0 < t < T, \tag{2.8}$$

where $m$ is the piston mass and $\alpha$ is the area of its head.

More in general, we consider also the effects of friction and/or known force $F(\dot{s}, s, t)$ acting directly on the piston head. Thus, (2.8) is replaced by

$$\ddot{s} = \tilde{\alpha}[c^2\sigma(s(t), t) - \varepsilon u_x(s(t), t)] + F(\dot{s}(t), s(t), t), \quad 0 < t < T, \tag{2.9}$$

where $\tilde{\alpha} = \alpha\rho_0/m$ and the constant term $\alpha C\rho_0^\gamma/m$ has been included in $F$.

At last, appropriate initial-boundary conditions must be prefixed and so the specific free boundary value problem is:

$$u_t + c^2\sigma_x = \varepsilon u_{xx}, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < s(t), \tag{2.10}$$

$$\sigma_t + u_x = 0, \qquad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < s(t), \tag{2.11}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \sigma(x, 0) = \sigma_0(x), \quad 0 < x < a, \tag{2.12}$$

$$u(0, t) = g(t), \qquad 0 < t < T, \tag{2.13}$$

$$u(s(t), t) = \dot{s}(t), \quad 0 < t < T, \tag{2.14}$$

$$\ddot{s} = \tilde{\alpha}[c^2\sigma(s(t), t) - \varepsilon u_x(s(t), t)] + F(\dot{s}(t), s(t), t), \quad 0 < t < T, \tag{2.15}$$

$$\dot{s}(0) = b, \quad s(0) = a > 0. \tag{2.16}$$

**3 - PRELIMINARY ESTIMATES**

We note that if $(u(x,t), \sigma(x,t))$ is a solution of system (2.10)-(2.11), then both $u$ and $\sigma$ satisfy the third order equation

$$(\varepsilon\partial_t + c^2)v_{xx} = v_{tt}. \tag{3.1}$$

The fundamental solution $K(x,t)$ of (3.1) has been established in [2], where a nonlinear viscoelastic model is discussed; if $I_n$ denotes the modified Bessel function of the first kind and

$$G(x,t) = \frac{e^{-\frac{c^2 t}{\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\left[e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}} + \frac{cx}{\varepsilon}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2(z+1)^2}{4\varepsilon t}} I_1\left(\frac{2xc}{\varepsilon}\sqrt{z}\right)\frac{dz}{\sqrt{z}}\right], \quad x > 0, \tag{3.2}$$

then, for all $x > 0$, one has

$$K(x,t) = \int_0^t G(x,\tau)d\tau, \quad x > 0. \tag{3.3}$$

The function $K$ has many basic properties completely similar to the heat fundamental solution. Indeed, for $x > 0$, $K$ is a $C^\infty$ function such that

$$K(x,t) > 0, \quad K_t(x,t) > 0, \quad x > 0, , \quad 0 < t \leq T. \tag{3.4}$$

When $x < 0$, one puts $G(-x,t) = G(x,t)$ and one has

$$\int_{\mathbb{R}} K_t(x,t)dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} K(x,t)dx = t, \quad 0 < t \leq T. \tag{3.5}$$

Moreover, the function $G = K_t$ can be estimated in terms of the fundamental solution of the heat operator. In fact, if we denote with $H$ the function

$$H(x,t) = \frac{e^{-c^2 t/\varepsilon}e^{-x^2/4\varepsilon t}}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} + \frac{c}{\varepsilon}e^{-(|x|-ct)^2/5\varepsilon t}, \tag{3.6}$$

the following estimate holds [3]

$$K_t \leq H. \tag{3.7}$$

Consider, now, the function

$$(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(x,t) = -\frac{xe^{-c^2 t/\varepsilon}e^{-x^2/4\varepsilon t}}{2t\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\left[1 + 2c^2 t/\varepsilon\right] - \tag{3.8}$$

$$-\frac{c^2 x e^{-c^2 t/\varepsilon}}{\varepsilon\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\int_0^\infty e^{-x^2(z+1)^2/4\varepsilon t} I_2\left(\frac{2xc}{\varepsilon}\sqrt{z}\right)\frac{dz}{z},$$

which solves the signaling problem for the operator (3.1). As we will see, this function plays the same role as the analogous kernel of the heat fundamental solution. We also note that the integral in (3.8) can be estimated similarly as the one in (3.2).

By means of $K$ we can obtain the solution $(v, z)$ of the system

$$v_t + c^2 z_x = \varepsilon v_{xx}, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0, \tag{3.9}$$

$$z_t + v_x = 0, \qquad x \in \mathbf{R},\ t > 0, \tag{3.10}$$

$$v(x,0) = u_0(x),\ z(x,0) = \sigma_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{3.11}$$

$$u_0,\ \sigma_0 \in C^2(\mathbf{R}), \tag{3.12}$$

where, $u_0$, $\sigma_0$ have compact support. Thus,

$$v(x,t) = \int_{\mathbf{R}} u_0(\xi) K_t(x-\xi, t)d\xi - \int_{\mathbf{R}} c^2\sigma_0'(\xi)K(x-\xi,t)d\xi, \tag{3.13}$$

$$z(x,t) = \int_{\mathbf{R}} \sigma_0(\xi) K_t(x-\xi, t)d\xi - \int_{\mathbf{R}} (u_0' + \varepsilon\sigma_0'')(\xi)K(x-\xi,t)d\xi, \tag{3.14}$$

where, as it is easy to verify [2],

$$\lim_{t\downarrow 0} v(x,t) = u_0(x), \quad \lim_{t\downarrow 0} z(x,t) = \sigma_0(x). \tag{3.15}$$

Moreover,

$$v_x(x,t) = \int_{\mathbf{R}} u_0'(\xi) K_t(x-\xi, t)d\xi - \int_{\mathbf{R}} c^2\sigma_0''(\xi)K(x-\xi,t)d\xi, \tag{3.16}$$

$$v_t(x,t) = \int_{\mathbf{R}} u_0''(\xi)(\varepsilon\partial_t + c^2)K(x-\xi,t)d\xi - \int_{\mathbf{R}} c^2\sigma_0'(\xi)K_t(x-\xi,t)d\xi. \tag{3.17}$$

## 4 - THE MOVING BOUNDARY VALUE PROBLEM

The *moving* boundary value problem related to the *free* boundary value problem (2.10)-(2.16) is:

$$u_t + c^2\sigma_x = \varepsilon u_{xx}, \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < s(t), \tag{4.1}$$

$$\sigma_t + u_x = 0, \qquad 0 < t \leq T, \ \ 0 < x < s(t), \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \sigma(x,0) = \sigma_0(x), \ \ 0 < x < a, \tag{4.3}$$

$$u(0,t) = g(t), \ u(s(t),t) = h(t), \ \ 0 < t < T, \tag{4.4}$$

where,

$$x = s(t), \ \ a = s(0) > 0, \tag{4.5}$$

is a *prefixed* curve such that

$$\Delta_1 = \inf_{0\leq t\leq T} s(t) > 0, \ \Delta_2 = \sup_{0\leq t\leq T} s(t) < \infty. \tag{4.6}$$

A basic role in finding a solution of (4.1)-(4.4) is plaied by

$$W(x,t,\varphi) = -2\int_0^t (\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(x - s(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)d\tau, \tag{4.7}$$

where $(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x$ is defined by (3.8). Indeed, we prove that a well known result of the heat theory, e.g. [1, 7], still holds here. In order to analyze the solution of (4.1)-(4.4), we state before the following

**Lemma 4.1.** *If $\varphi(t)$, $s(t)$ are continuous functions and $s(t)$ verifies a Lipschitz condition, then*

$$\lim_{x\to s(t)\pm} W(x,t,\varphi) = \pm\varphi(t) + W(s(t),t,\varphi), \ \ t > 0. \tag{4.8}$$

**Proof.** With obvious modifications, the proof is similar to that one given in [3].

Assume, now, the following hypotheses on the data

$$g, h, s \in C^1([0,T]), \tag{4.9}$$

$$u_0, \sigma_0 \in C^2([0,a]), \tag{4.10}$$

together with compatibility conditions

$$g(0) = u_0(0), \ h(0) = u_0(a). \tag{4.11}$$

Moreover, we take a smooth extension with compact support of initial data (4.10) and we put

$$E(\dot{s}(t); x, t) = \dot{s}(t)K_t(x,t) + (\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(x,t). \tag{4.12}$$

Then, a solution $u$ of the problem (4.1)-(4.4) can be given by means of the auxiliary functions $\varphi$, $\psi$:

$$u(x,t) = v(x,t) + 2\int_0^t \varphi(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(x,t-\tau)d\tau + \tag{4.13}$$

$$+2\int_0^t \psi(\tau)E(\dot{s}(\tau); x - s(\tau), t-\tau)d\tau,$$

where $v(x,t)$ is given by (3.13) and $\varphi, \psi \in C^1$, are unknown functions to be determined such that

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0, . \tag{4.14}$$

Obviously, $u$ satisfies initial condition $(4.3)_1$, because of $(3.15)_1$

**Remark 4.1**. We are going to determine the function $\sigma$ such that, together with $u$, verifies problem (4.1)-(4.4). For this, as we will see, the operator $E$ which appears in (4.13), seems to represent the natural extension of the analogous heat kernel.

From (4.13), (4.14) we have

$$u_x(x,t) = v_x(x,t) + 2\int_0^t \dot{\varphi}(\tau)K_t(x,t-\tau)d\tau + \tag{4.15}$$

$$+2\int_0^t \dot{\psi}(\tau)K_t(x - s(\tau), t-\tau)d\tau,$$

$$u_t(x,t) = v_t(x,t) + 2\int_0^t \dot{\varphi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(x,t-\tau)d\tau + \tag{4.16}$$

$$+2\int_0^t \dot{\psi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(x - s(\tau), t-\tau)d\tau,$$

with $v_x = -z_t$ and $v_t$ given by (3.16), (3.17). Also,

$$(\partial_t - \varepsilon\partial_x^2)u(x,t) = (\partial_t - \varepsilon\partial_x^2)v(x,t) + \tag{4.17}$$

$$+2c^2\partial_x\left[\int_0^t \dot{\varphi}(\tau)K(x,t-\tau)d\tau + \int_0^t \dot{\psi}(\tau)K(x - s(\tau), t-\tau)d\tau\right],$$

where $(\partial_t - \varepsilon\partial_x^2)v(x,t) = -c^2 z_x(x,t)$. Consequently, the function

$$\sigma(x,t) = z(x,t) - 2\int_0^t \dot{\varphi}(\tau)K(x,t-\tau)d\tau - \tag{4.18}$$

$$-2\int_0^t \dot{\psi}(\tau)K(x-s(\tau),t-\tau)d\tau$$

verifies, together with $u$, system (4.1), (4.2) and also initial condition $(4.3)_2$, because of $(3.15)_2$.

Now, we have to show that $\varphi, \psi \in C^1$ can be uniquely determined and $u$ satisfies boundary conditions (4.4). We use these in order to achieve the equations for the unknowns $\varphi, \psi$. First, from (4.13) and (4.8) we get

$$\varphi(t) = v(0,t) - g(t) + 2\int_0^t \psi(\tau)E(\dot{s}(\tau); -s(\tau), t-\tau)d\tau, \tag{4.19}$$

$$\psi(t) = h(t) - v(s(t),t) - 2\int_0^t \varphi(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(s(t), t-\tau)d\tau - \tag{4.20}$$

$$-2\int_0^t \psi(\tau)E(\dot{s}(\tau); s(t)-s(\tau), t-\tau)d\tau.$$

Next, we consider (4.15), (4.16) and let $x \to s(t)$, $x \to 0$. Using Lemma 4.1 we obtain

$$u_x(s(t),t) = v_x(s(t),t) + 2\int_0^t \dot{\varphi}(\tau)K_t(s(t), t-\tau)d\tau + \tag{4.21}$$

$$+2\int_0^t \dot{\psi}(\tau)K_t(s(t)-s(\tau), t-\tau)d\tau,$$

$$u_t(0,t) = -\dot{\varphi}(t) + v_t(0,t) + 2\int_0^t \dot{\psi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(-s(\tau), t-\tau)d\tau, \tag{4.22}$$

$$u_t(s(t),t) = \dot{\psi}(t) + v_t(s(t),t) + 2\int_0^t \dot{\varphi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(s(t), t-\tau)d\tau + \tag{4.23}$$

$$+2\int_0^t \dot{\psi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(s(t)-s(\tau), t-\tau)d\tau.$$

Hence, as $\dot{g}(t) = u_t(0,t)$, $\dot{h}(t) = (\dot{s}(t)\partial_x + \partial_t)u(s(t),t)$, it follows

$$\dot{\varphi}(t) = v_t(0,t) - \dot{g}(t) + 2\int_0^t \dot{\psi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(-s(\tau), t-\tau)d\tau, \tag{4.24}$$

$$\dot{\psi}(t) = \dot{h}(t) - \dot{v}(s(t),t) - 2\int_0^t \dot{\varphi}(\tau)E(\dot{s}(t); s(t), t-\tau)d\tau - \tag{4.25}$$

$$-2\int_0^t \dot{\psi}(\tau)E(\dot{s}(t); s(t)-s(\tau), t-\tau)d\tau.$$

Integral equations (4.19), (4.20), (4.24), (4.25) are a Volterra system which can be solved, for example, by means of the fixed point theorem. For this we will apply the estimates of Sec. 3 obtnaining a unique continuous solution $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\dot{\psi}(t)$.

So, we can state

**Theorem 4.1**. *The functions u and σ defined, respectively, by* (4.13) and (4.18) *are solutions of the problem* (4.1)-(4.4) *under the hypotheses* (4.6), (4.9), (4.10).

**Remark 4.2**. With reference to equation (2.15) of the free boundary value problem stated in Sec. 2, we note that the value of the function $(c^2\sigma - \varepsilon u_x)(x, t)$ on the moving boundary $x = s(t)$ can be obtained from (4.18), (4.21)

$$(4.26)\quad (c^2\sigma - \varepsilon u_x)(s(t), t) = \int_R [c^2\sigma_0(\xi)\partial_t - u_0'(\xi)(\varepsilon\partial_t + c^2)]K(s(t) - \xi, t)d\xi -$$

$$-2\int_0^t [\dot{\varphi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K(s(t), t-\tau) + \dot{\psi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K(s(t) - s(\tau), t-\tau)]d\tau.$$

## 5 - THE FREE PISTON MODEL

Now, we consider the free boundary problem (2.10)-(2.16) and use the results of Sec. 4 with $h(t)$ replaced by $\dot{s}(t)$. So, the hypotheses on the data are

$$(5.1)\qquad u_0, \sigma_0 \in C^2([0, a]), \quad g \in C^1([0, T]),$$

together with the compatibility conditions

$$(5.2)\qquad g(0) = u_0(0), \ \dot{s}(0) = u_0(a).$$

Consider, now, the functions $u$ and $\sigma$

$$(5.3)\qquad u(x, t) = v(x, t) + 2\int_0^t \varphi(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(x, t-\tau)d\tau +$$

$$+2\int_0^t \psi(\tau)E(\dot{s}(\tau); x - s(\tau), t-\tau)d\tau,$$

$$(5.4)\qquad \sigma(x, t) = z(x, t) - 2\int_0^t \dot{\varphi}(\tau)K(x, t-\tau)d\tau -$$

$$-2\int_0^t \dot{\psi}(\tau)K(x - s(\tau), t-\tau)d\tau,$$

where $v$, $z$ are defined by (3.13), (3.14), after a smooth extension with compact support of the initial data. We note that, if $s(t) \in C^2$ and $\varphi, \psi \in C^1([0, T])$ were known, then $u$, $\sigma$ would be solutions of (2.10), (2.11) and satisfy the initial conditions (2.12). Equations for $\varphi$, $\psi$ are obtained by using the boundary conditions (2.13), (2.14). Indeed, we apply again the previous results to get

$$(5.5) \quad \varphi(t) = v(0,t) - g(t) + 2\int_0^t \psi(\tau) E(\dot{s}(\tau); -s(\tau), t-\tau)d\tau,$$

$$(5.6) \quad \psi(t) = \dot{s}(t) - v(s(t), t) - 2\int_0^t \varphi(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(s(t), t-\tau)d\tau -$$

$$-2\int_0^t \psi(\tau) E(\dot{s}(\tau); s(t) - s(\tau), t-\tau)d\tau,$$

where $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ because of (5.2).

Now, we have to prove that $s(t) \in C^2$ can be uniquely found and that $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ exist continuous. We use (4.24), (4.25), to deduce

$$(5.7) \quad \dot{\varphi}(t) = v_t(0,t) - \dot{g}(t) + 2\int_0^t \dot{\psi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K_x(-s(\tau), t-\tau)d\tau,$$

$$(5.8) \quad \dot{\psi}(t) = \ddot{s}(t) - \dot{v}(s(t), t) - 2\int_0^t \dot{\varphi}(\tau) E(\dot{s}(t); s(t), t-\tau)d\tau -$$

$$-2\int_0^t \dot{\psi}(\tau) E(\dot{s}(t); s(t) - s(\tau), t-\tau)d\tau.$$

Finally, from (2.15) and (4.26) we get

$$(5.9) \quad \ddot{s}(t) = F(\dot{s}, s, t) + \tilde{\alpha}\int_R [c^2\sigma_0(\xi)\partial_t - u_0'(\xi)(\varepsilon\partial_t + c^2)]K(s(t) - \xi, t)d\xi -$$

$$-2\tilde{\alpha}\int_0^t [\dot{\varphi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K(s(t), t-\tau) + \dot{\psi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K(s(t) - s(\tau), t-\tau)]d\tau.$$

When this last result is substituded into (5.8), we have a nonlinear integro-differential system for $\varphi$, $\psi$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $s$.

## 6 - DISCUSSION OF THE NONLINEAR SYSTEM

Consider the Volterra system (5.5)-(5.9) and transform it by using the equivalent unknown

$$(6.1) \quad y(t) = \ddot{s}(t),$$

instead of $s(t)$. So, for example, equation (5.9) becames

$$(6.2)\quad y(t) = F(\dot{s}, s, t) + \tilde{\alpha} \int_R [c^2 \sigma_0(\xi)\partial_t - u_0'(\xi)(\varepsilon\partial_t + c^2)]K(s(t) - \xi, t)d\xi -$$

$$-2\tilde{\alpha} \int_0^t [\dot{\varphi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K(s(t), t-\tau) + \dot{\psi}(\tau)(\varepsilon\partial_t + c^2)K(s(t) - s(\tau), t-\tau)]d\tau.$$

Here and in equations (5.5)-(5.8) now it is

$$(6.3)\qquad \dot{s}(t) = b + \int_0^t y(\tau)d\tau,\quad s(t) = a + bt + \int_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau.$$

We assume the known force acting on the piston is a continuous bounded function which satisfies a Lipschitz condition

$$(6.4)\quad |F(\dot{s}, s, t)| \le C_D,\quad |F(\dot{s}_1, s_1, t) - F(\dot{s}_2, s_2, t)| \le L\{|\dot{s}_1 - \dot{s}_2| + |s_1 - s_2|\},$$

and all the boundary data (and their derivatives) are bounded by the same $C_D$.

Preliminary, we observe that when $|y|$ is bounded, say, by $M$, then there exists a time interval in which $s(t)$ is greater then a positive constant. Indeed, from (6.3) we easily have

$$|s(t) - a| \le |b|t + Mt^2/2,\quad 0 \le t \le T,$$

and, therefore,

$$(6.5)\qquad a/2 \le s(t) \le 3a/2,\quad 0 \le t \le T,$$

if we take $T$ such that $|b|t + Mt^2/2 \le a/2$. We also have

$$(6.6)\qquad |s(t) - s(\tau)| \le |b|(t-\tau) + 2M(t-\tau)^2.$$

Now, we consider the map $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_5)$, where $\mathcal{T}_5$ is defined by the right-hand side of (6.2) and the others by the right-hand sides of (5.5)-(5.8), after the subsitutions (6.1), (6.3) have been performed.

If $\omega = (\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, y)$ is continuous and bounded by $M$, so are $\mathcal{T}_i(\omega)$, in a suitable time interval.

Next, we prove $\mathcal{T}(\omega)$ is a contractive map, using a weighted norm, equivalent to the lagrangian one,

$$(6.7)\quad ||\omega||_T = \sup_{0\le t\le T} e^{-\gamma t}|\varphi(t)| + \sup_{0\le t\le T} e^{-\gamma t}|\psi(t)| + \sup_{0\le t\le T} e^{-\gamma t}|\dot{\varphi}(t)| +$$

$$+ \sup_{0\le t\le T} e^{-\gamma t}|\dot{\psi}(t)| + \sup_{0\le t\le T} e^{-\gamma t}|y(t)|,$$

where $\gamma$ is a positive constant we fix later in order to get a contraction.

We only sketch the discussion of the equation (6.2) as the others are similar. We, first, note that from (6.3) it follows

$$|\dot{s}_1(t) - \dot{s}_2(t)|e^{-\gamma t} \leq \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}e^{-\gamma\tau}|y_1(\tau) - y_2(\tau)|d\tau.$$

Hence,

(6.8) $$|\dot{s}_1(t) - \dot{s}_2(t)|e^{-\gamma t} \leq (1/\gamma)||\omega_1 - \omega_2||_T, \quad t < T.$$

Similarly,

(6.9) $$|s_1(t) - s_2(t)|e^{-\gamma t} \leq (t/\gamma)||\omega_1 - \omega_2||_T, \quad t < T.$$

Consequently,

(6.10) $$|F(\dot{s}_1, s_1, t) - F(\dot{s}_2, s_2, t)|e^{-\gamma t} \leq (L/\gamma)||\omega_1 - \omega_2||_T(1+t), \quad t < T,$$

because of (6.4).

Now, we note that the basic results of Sec. 3 reduce the estimates for our kernels to the heat operator. Consequently, we can apply the methods used by [7] for the classical Stefan problem. Omitting the details, we get

(6.11) $$|\mathcal{T}_5(\omega_1) - \mathcal{T}_5(\omega_2)|e^{-\gamma t} \leq ||\omega_1 - \omega_2||_T \, C(T)/\sqrt{\gamma},$$

where $C(T)$ depends on $T$ and all structural constants of the problem. Since analogous estimates hold for the other equations, we can conclude that $\mathcal{T}$ is a contraction for $\gamma$ large enough and system (5.5)-(5.8), (6.2) has a unique continuous solution.

When $y(t)$ has been determined, obviously, $s(t)$ is given by $(6.3)_2$. Thus, we can state

**Theorem 6.2.** *Assume the hypotheses* (5.1), (5.2), (6.4) *are fullfilled. Then there exists a* $C^2([0, T])$ *function* $s(t)$, *which satisfies, together with* $u$, $\sigma$, *given by* (5.3), (5.4), *the free boundary value problem* (2.10)-(2.16).

## 7 - REFERENCES

[1] J. R. Cannon, *The One-Dimensional Heat Equation*, Addison-Wesley, 1984.

[2] B. D'Acunto, P. Renno, *On Some Nonlinear Visco-elastic Models*, Ricerche di Mat., **41**, p. 101, 1992.

[3] B. D'Acunto, P. Renno, *On the operator* $\varepsilon\partial_{xxt} + c^2\partial_{xx} - \partial_{tt}$ *in General Domains*, Rend. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1998, (to appear).

[4] D. G. Duffy, *Solutions of Partial Differential Equations*, TAB Professional and Reference Books, 1986.

[5] S. D. Eidel'man, *Parabolic Systems*, North-Holland, 1969.

[6] J. M. Flavin, S. Rionero, *A free boundary value problem for a nonlinear heat equation*, (to appear).

[7] A. Friedman, *Free Boundary Problems for Parabolic Equations I. Melting of solids*, J. Math. Mech., **8** (4), 1959.

[8] L. I. Rubinstein, *The Stefan problem*, Translations of Mathematical Monographs, 1967.

[9] S. Takeno, *Free Piston Problem for Isentropic Gas Dynamics*, Japan J. Appl. Math., **12**, 1995.

[10] S. Yanagi, *Existence of uniform bounded solution to the piston problem for one-dimensional equations of compressible viscous gas*, Advances in Math. Sci. and Appl., **6** (2), 1996.

# NOTE PER GLI AUTORI

Il Rendiconto pubblica, di norma in italiano, le comunicazioni fatte dai soci in una delle adunanze ordinarie dell'Accademia. I soci possono presentare anche lavori di altri autori. In questo caso l'accettazione della nota per la pubblicazione è condizionata al parere favorevole di una commissione designata dall'Accademia.

La nota dovrà essere presentata in triplice copia, pronta per la riproduzione fotografica alla stessa grandezza. Ciò richiede che la sua stesura sia conforme al modello che è riportato in Appendice al volume annuale ed esclude che si possano apportare modifiche.

I dattiloscritti devono essere su carta bianca in buona qualità e la parte scritta deve essere contenuta in un rettangolo di 12.5 x 19 cm.. Si suggerisce l'uso di una stampante laser. I disegni di formule e grafici non possono essere accettati se prodotti a mano libera; devono essere ad alto contrasto e non superare, insieme alle intestazioni e alle didascalie, il rettangolo di scrittura della pagina. Le fotografie, anche di grafici e disegni, devono essere in carta lucida ad alto contrasto e già inserite nel manoscritto. In alternativa può essere lasciato libero lo spazio occorrente per l'effettivo inserimento della figura all'atto della riproduzione e le figure presentate in allegato. Le fotografie a mezzi toni e quelle a colori devono rispondere a criteri di riproducibilità ed essere utilizzate solo se neessarie per la completezza dell'esposizione. Le intestazioni delle figure e le eventuali didascalie non devono confondersi con il testo. Ogni pagina, inclusa la prima, deve essere numerata progressivamente con il numero in matita blu inserito in basso a destra, oltre il riquadro dello scritto. I riferimenti bibliografici possono essere indicati nel testo numericamente, in ordine di citazione, o per autore, mantetendo la stessa presentazione nella Sezione Riferimenti bibliografici (References). In ogni caso dovranno riportare nell'ordine necessariamente: i nomi degli autori, l'anno di pubblicazione, il titolo completo, il titolo della rivista, il numero e la pagina di inizio e di fine del lavoro. La struttura del dattiloscritto, i caratteri grafici da utilizzare, le loro grandezze e le spaziature sono indicate nell'esempio in Appendice.

I dattiloscritti non conformi alle norme previste non potranno essere accettati per la pubblicazione.

Saranno forniti gratuiti 25 estratti senza copertina, se vi è un solo autore, 50 estratti in caso di più autori. Ulteriori estratti e/o l'aggiunta della copertina sono a carico degli autori che ne dovranno fare richiesta esplicita all'atto della presentazione del dattiloscritto per la opportuna comunicazione preventiva all'editore che comunicherà l'ammontare della spesa.

# *APPENDICE*

## NORME PER LA STESURA DI UN DATTILOSCRITTO

**Prima pagina.**

Si lasciano vuoti quattro righi dall'alto.

Titolo: **Grassetto, Times New Roman (TNR) 13 con testo centrato.**

**La Secca delle Formiche di Vivara**
**(canale d'Ischia, Campania)**
**Osservazioni Geomorfologico-strutturali e Faunistiche**

A distanza di 1 rigo digitare gli autori della nota con **caratteri TNR 11**:

Nota di Vincenzo Rosso[1], Nicola Verde[2] e Pasquale Bianco[1,*]

A distanza di 0.5 righi digitare il nome del presentatore e la data dell'adunanza con caratteri **TNR 9**:

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

A distanza di 1.5 righi digitare in lingua inglese le Key words con caratteri **TNR 9** come indicato:

*Key words*: stratigraphy, island, DNA, proteinase, etc.

A distanza di 0.5 righi digitare, come indicato, due riassunti con caratteri **TNR 9** di cui uno in italiano e l'altro in inglese:

**Abstract** - Abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified;

Al termine lasciare vuoto 1.5 righi

**Riassunto** - Scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato.

Al termine del secondo riassunto si lasciano vuoti 2 righi e si digita a sinistra in **grassetto maiuscolo con caratteri TNR 9** il titolo del primo paragrafo che deve essere Introduzione.

**1 - INTRODUCTION**

Si lascia 0.5 righi e si inizia la digitazione con caratteri **TNR 11 giustificato** indentando i capoversi di 0.6 cm.

Primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione.

.....

Ultimo capoverso dell'introduzione. Ricordarsi che i capoversi vanno indentati di 0.6 cm.

Dopo questa sezione, e fra la fine di una sezione e l'intestazione dell'altra, si lasciano vuoti due righi. Si usa **il grassetto maiuscolo TNR 9** per tutte le intestazioni che saranno separate dal corpo della rispettiva sezione di 0.5 righi e per il corpo delle sezioni si useranno caratteri **TNR 11**, come per la sezione INTRODUZIONE. L'ultima sezione deve essere sempre RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI (REFERENCES). Se esistono, mettere nell'ordine, le seguenti sezioni: 2 - MATERIALI E METODI (MATERIALS AND METHODS), 3 - RISULTATI (RESULTS), 4 - DISCUSSIONE (DISCUSSION), o CONCLUSIONI (CONCLUSIONS), 5 -RIFERIMENTI

BIBLIOGRAFICI (REFERENCES). I riferimenti, di cui si forniscono esempi per periodici e libri, **vanno scritti in TNR 9 con i titoli in corsivo**:

Hudson, T.H. and Grillo, F.G. (1993) *Reactivation of an inactive human X chromosome.* Science, **230**, 157-163.
Abrahams, R. and Marsden, J. (1978) *Foundation of mechanics.* Benjamin, New York, NY

Eventuali Ringraziamenti (Acknowledgements) per finanziamenti o altro vanno inseriti a piè di pagina al termine di RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI usando **TMS 9**.

Es:

**Acknowledgements**: i contributi economici, i ringraziamenti per notizie, altro.

Ricordare che come note a pié pagina della prima pagina, dopo una linea di divisione, vanno inseriti in **Times New Roman 9** i richiami e le eventuali annotazioni riguardanti il titolo e gli autori come nell'esempio:

---

[1] Dipartimento 1, indirizzo 1; Dipartimento 2, indirizzo 2 e così per i vari numeri che nel titolo distinguono gli autori.

[*] Author to whom correspondence should be addressed (Autore a cui indirizzare la corrispondenza)

Esempio di prima pagina

# Analisi sismologiche fatte nella terra d'Otranto nel decennio 1970-1980

Nota di Vincenzo Rosso[1], Nicola Verde[2] e Pasquale Bianco[1]*

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

*Key words*: : stratigraphy, Apulia, protein, hemoglobin etc.

**Abstract** - Abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified;

**Riassunto** - Scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano.

## 1 - INTRODUCTION

Primo capoverso dell'introduzione primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione.

(Al termine della prima pagina, a pié pagina si inserisce)

[1,2...] Indirizzi e le varie affiliazioni; tanti quanti necessari per i vari autori
* Author to whom correspondence should be addressed

(qui termina la nota a piè pagina e la pagina 1)